א. (1) נסמן ב- x את הזמן (בשעות) הדרוש לצינור I למלא את כל נפח הברֵכה לבדו, ו ב- y את צינור II

	צינור	זמן (שעות)	הספק לשעה (מ"ק)	חלקי עבודה
בדרך כלל	I	6	$\frac{1}{x}$	$\frac{6}{x}$
	II	6	$\frac{1}{y}$	$\frac{6}{y}$
יום אחד	I	$0.25x$	$\frac{1}{x}$	0.25
	II	$0.25y$	$\frac{1}{y}$	0.25
סעיף ב	I	$0.3x$	$\frac{1}{x}$	0.3

בדרך כלל ממלאים שני הצינורות את הבריכה במשך 6 שעות, לכן $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1$

יום אחד, מילאו כ"א רבע נפח, במשך m שעות, לכן $0.25x+0.25y=m$

$$\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1 \\ 0.25x+0.25y=m \quad \rightarrow x+y=4m \end{cases}$$

$$xt+18t-18m=xt-12x+18t-216$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{x}+\frac{6}{4m-x}=1$$

$$24m-6x+6x=4mx-x^2 \quad \rightarrow x^2-4mx+24m=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{4m\pm\sqrt{16m^2-96m}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{1,2}=2m\pm2\sqrt{m^2-6m}} \quad m^2-6m>0 \quad \rightarrow m\geq6 \quad \leftarrow m>0$$

תשובה: $2m\pm2\sqrt{m^2-6m},\ m\geq6$

(2) פתרון אחד יתקבל כאשר $\Delta=0$, כלומר כאשר $\boxed{m=6}$

ב. על פי הנתון $0.3x=3$ ובהתאם $x=10$

$$10=2m\pm2\sqrt{m^2-6m}$$

$$5-m=\pm\sqrt{m^2-6m}$$

$$25-10m+m^2=m^2-6m$$

$$25=4m$$

$$m=6.25$$

$$10=2\cdot6.25-2\sqrt{6.25^2-6\cdot6.25} \quad \rightarrow 10=10 \quad o.k.$$

תשובה: $m=6.25$

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $2^{-4\cdot1}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{16}=24$ אגף שמאל: $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot4k=2^{-4k}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל

$$\underline{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot4k}\cdot(4k+1)\cdot(4k+2)\cdot(4k+3)\cdot(4k+4)=$$
$$\downarrow$$
$$2^{-4(k+1)}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k\cdot(8k+2)\cdot(8k+4)\cdot(8k+6)\cdot(8k+8)$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow 2^{-4k}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k\cdot(4k+1)\cdot(4k+2)\cdot(4k+3)\cdot(4k+4)=$$
$$2^{-4k-4}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k\cdot2\cdot(4k+1)\cdot2\cdot(4k+2)\cdot2\cdot(4k+3)\cdot2\cdot(4k+4)$$
$$\Leftrightarrow 2^{-4k}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k\cdot(4k+1)\cdot(4k+2)\cdot(4k+3)\cdot(4k+4)=$$
$$\frac{2^{-4k}}{\cancel{16}}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k\cdot\cancel{2}\cdot(4k+1)\cdot\cancel{2}\cdot(4k+2)\cdot\cancel{2}\cdot(4k+3)\cdot\cancel{2}\cdot(4k+4)$$
$$\Leftrightarrow 2^{-4k}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k\cdot(4k+1)\cdot(4k+2)\cdot(4k+3)\cdot(4k+4)=$$
$$2^{-4k}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot8k\cdot(4k+1)\cdot(4k+2)\cdot(4k+3)\cdot(4k+4)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. יש למצוא את ערכו של b במשוואה $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot199}{202\cdot204\cdot206\cdot...\cdot400}=2^{-b}$

נשים לב כי עבור $n=50$ מתקבל מהטענה שהוכחה בסעיף א –

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot...\cdot199\cdot200=2^{-200}\cdot2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot200\cdot202\cdot204\cdot206\cdot...\cdot400$$

$$\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot\cancel{4}\cdot5\cdot\cancel{6}\cdot...\cdot199\cdot\cancel{200}}{\cancel{2}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{6}\cdot...\cdot\cancel{200}\cdot202\cdot204\cdot206\cdot...\cdot400}=2^{-200}$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot199}{202\cdot204\cdot206\cdot...\cdot400}=2^{-200}$$

תשובה: $b=200$

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{(x-b)^2}{x^2-4}$ **,** $b>2$**.**

(1) תחום ההגדרה $\boxed{x\neq\pm2}$ $x^2-4\neq0 \quad \to x^2\neq4 \quad \to$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-b)^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2b}{x}+\frac{b^2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-0+0}{1-0}=1$ **, לכן** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית**

$\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-b)^2}{x^2-4}=\frac{(2-b)^2}{4-4}=\frac{+}{0^{-+}}=\pm\infty \quad \leftarrow b>2$

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x-b)^2}{x^2-4}=\frac{(2-b)^2}{4-4}=\frac{+}{0^{-+}}=\pm\infty \quad \leftarrow b>2$

, לכן $x=2, x=-2$ **אסימפטוטה אנכית**

תשובה: $x\neq\pm2$ **,** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית ,** $x=2, x=-2$ **אסימפטוטות אנכית**

(2) חיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל:** $(b,0)$ **, חיתוך עם ציר** y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,-\frac{b^2}{4})$

תשובה: $(b,0)$ **,** $(0,-\frac{b^2}{4})$**.**

(3) נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן

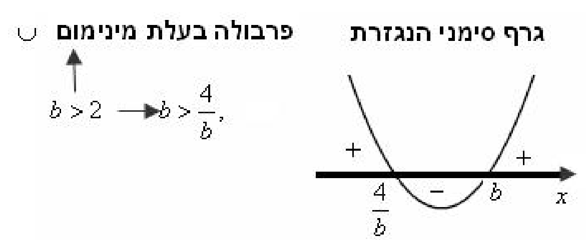
$$f'(x)=\frac{2(x-b)(x^2-4)-2x(x-b)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{2(x-b)(x^2-4-x(x-b))}{(x^2-4)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x-b)(bx-4)}{(x^2-4)^2}}$$

$0=(x-b)(bx-4)$

$x=b \quad \to (b,0)$

$$x=\frac{4}{b} \quad \to (\frac{4}{b},\frac{4-b^2}{4})\; f(\frac{4}{b})=\frac{(\frac{4}{b}-b)^2}{(\frac{4}{b})^2-4}=\frac{\frac{(4-b^2)^2}{b^2}}{\frac{16-4b^2}{b^2}}=\frac{(4-b^2)^2}{4(4-b^2)}=\frac{4-b^2}{4}$$

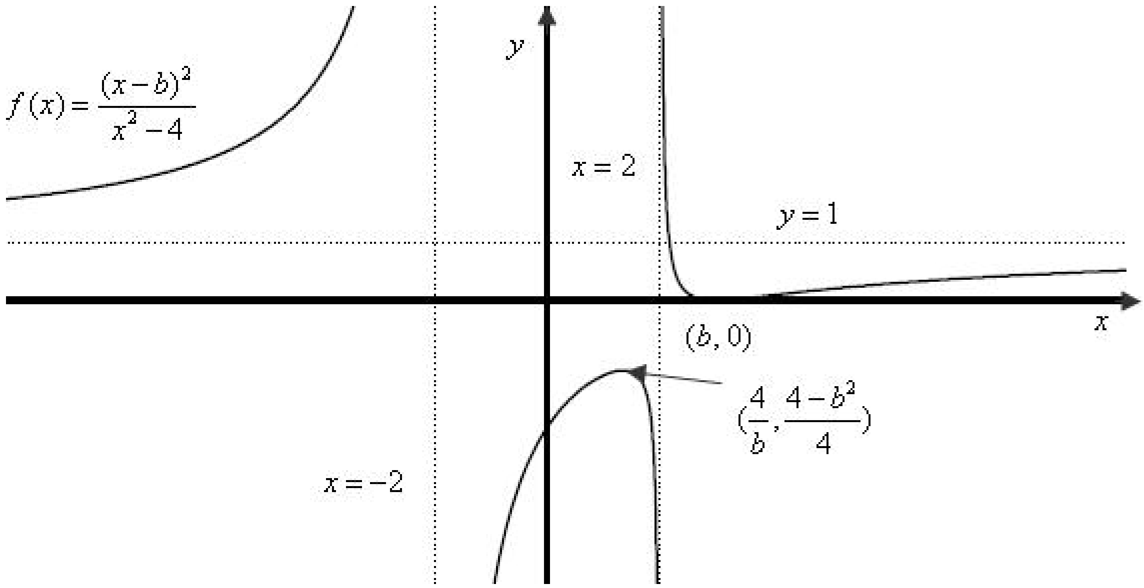


$x=\frac{4}{b}$ **עוברים מנגזרת חיובית לשלילית, כלומר מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

$x=b$ **עוברים מנגזרת שלילית לחיובית, כלומר מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

תשובה: $(b,0)$**מינימום,** $(\frac{4}{b},\frac{4-b^2}{4})$ **מקסימום**

ב. עבור $b>2$ הסקיצה המתאימה



ג. נמצא את התחום המשותף שבו פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית <u>וגם</u> פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית

כאשר נתון כי ל- $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

כאשר פונקציית הנגזרת שלילית, הרי ש $f(x)$ יורדת

על פי הסקיצה $f(x)$ יורדת עבור $2<x<b$ או $\frac{4}{b}<x<2$

ע"פ נקודת המקסימום, שמתקיימת באזור שבו $f''(x)<0$, והעובדה שיש רק נקודת פיתול אחת,

$f(x)$ קעורה עלפי מטה, כלומר $f''(x)$ שלילית בתחום $\frac{4}{b}<x<2$

(נקודת הפיתול צפויה להיות בתחום $x>b$, בתחום בו הפונקציה עולה)

תשובה: $\frac{4}{b}<x<2$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$ **בתחום** $-3® \le x \le 3®$.

$f(-x)=\dfrac{2\cos^2(-\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(-\frac{x}{2})}=\dfrac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=f(x)$ **ולכן הפונקציה זוגית.**

ב. תחום ההגדרה $\boxed{x\ne ®+2®k}$ $2\cos^2(\frac{x}{2})\ne 0 \;\rightarrow \cos(\frac{x}{2})\ne 0 \;\rightarrow \frac{x}{2}\ne\frac{®}{2}+®k \;\rightarrow$

תשובה:האסימפטוטות אנכיות: $x=3®,\quad x=®,\quad x=-®,\quad x=-3®$ **(עבור** $k=0,1,-1,-2$ **)**

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון

$$f(x)=\frac{2\cos^2(\frac{x}{2})-1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=1-\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=1-\frac{1}{\cos x+1}$$

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{(\cos x+1)^2}$$

$$0=\sin x \;\rightarrow x=®k \;\rightarrow k=-2,0,2 \;\rightarrow x=-2®,0,2®$$

$$f''(mone)=-\cos x \;\rightarrow f''(-2®)=-1<0,\ f''(0)=-1<0 \;\rightarrow Max$$

$$f(-2®)=f(2®)=1-\frac{1}{\cos 2®+1}=0.5,\quad f(0)=1-\frac{1}{\cos 0+1}=0.5$$

$x=2®$ **מקסימום בשל זוגיות הפונקציה**

השימוש בנגזרת שנייה לקביעת סימן הקיצון אפשרי, כי מכנה $f'(x)$ **חיובי ו -** $f'(x)=0$

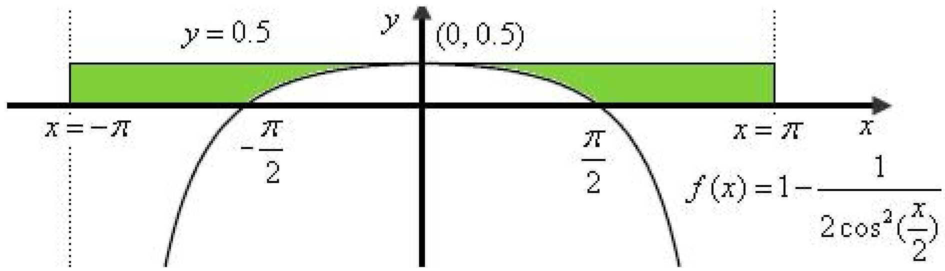
תשובה: $(2®,0.5),\quad (0,0.5),\quad (-2®,0.5)$ **מקסימום**

ד. נחשב את השטח המבוקש, תוך שימוש בהצגה הבאה של הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$ **,**

והישר $y=0.5$ **העובר בנקודת המקסימום.**

בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $\cos x = 0$ **ולכן** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

ועבור $k=0,-1$ **נקבל** $x=\frac{\pi}{2},\ x=-\frac{\pi}{2}$



נחשב את השטח המבוקש: $S_{\text{GREEN}} = S_{\text{MALBEN}} - S_{WHITE}$

$$S_{\text{MALBEN}} = 2\pi \cdot 0.5 = \pi$$

$$S_{\text{WHITE}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}-0\right) dx$$

$$S_{\text{WHITE}} = \left(x-\frac{0.5}{0.5}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S_{\text{WHITE}} = \left(\frac{\pi}{2}-\tan\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-\tan\frac{-\pi}{4}\right)$$

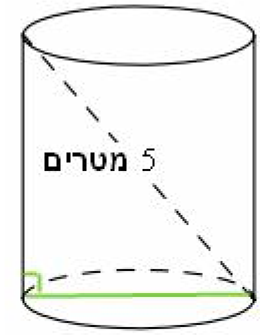
$$S_{\text{WHITE}} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$\boxed{S_1 = \pi - 2}$$

$$S_{\text{GREEN}} = \pi - (\pi - 2) = 2$$

תשובה: 2 **יח"ר**

נכתב ע"י עפר ילין



הפונקציה שיש להביא למקסימום מחיר בניית הדוד הפתוח

נסמן: p **- מחיר מ"ר של דופן הגליל,**

ובהתאם $3p$ **- מחיר מ"ר של הבסיס התחתון.**

R **רדיוס מעגל הבסיס הוא המשתנה של התרגיל** $(R < 2.5)$

ובאמצעות משפט פיתגורס נקבל $H = \sqrt{25-4R^2}$

$$\boxed{f(x) = 3p \cdot ® R^2 + p \cdot 2® R\sqrt{25-4R^2}}$$

$$f'(x) = p® (6R + 2\sqrt{25-4R^2} - \frac{16R^2}{2\sqrt{25-4R^2}})$$

$$f'(x) = p® \frac{(6R\sqrt{25-4R^2} + 2(25-4R^2) - 8R^2}{\sqrt{25-4R^2}})$$

$$\boxed{f'(x) = 2p® \cdot \frac{3R\sqrt{25-4R^2} + 25 - 8R^2}{\sqrt{25-4R^2}}}$$

$$0 = 3R\sqrt{25-4R^2} + 25 - 8R^2$$

$$25 - 8R^2 = 3R\sqrt{25-4R^2}$$

$$625 - 400R^2 + 64R^4 = 9R^2(25-4R^2)$$

$$100R^4 - 625R^2 + 625 = 0$$

$$(R^2{}_{1,2}) = \frac{625 \pm 375}{200} \quad \rightarrow R^2 = 5,\ R^2 = 1.25 \quad \rightarrow R = \sqrt{5},\ R = \sqrt{1.25}$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1\sqrt{25 - 4 \cdot 1^2} + 25 - 8 \cdot 1^2 = 30.7 > 0$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2\sqrt{25 - 4 \cdot 2^2} + 25 - 8 \cdot 2^2 = 11 > 0$$

$$f'(2.4) = 3 \cdot 2.4\sqrt{25 - 4 \cdot 2.4^2} + 25 - 8 \cdot 2.4^2 = -11 < 0$$

R	2.5	2.4	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{1.25}$	1	0
$f'(R)$		-	0	+	0	+	
מסקנה		↘	Max	↗	פיתול	↗	

כלומר, עבור $R = \sqrt{5}$ **מחיר בניית הדוד הפתוח מקסימלי.**

במקרה זה, שטח בסיס הדוד הוא $® (\sqrt{5})^2 = 5®$

תשובה: שטח בסיס $5®$ **מ"ר, כאשר עלות בניית הדוד הפתוח מקסימלית.**