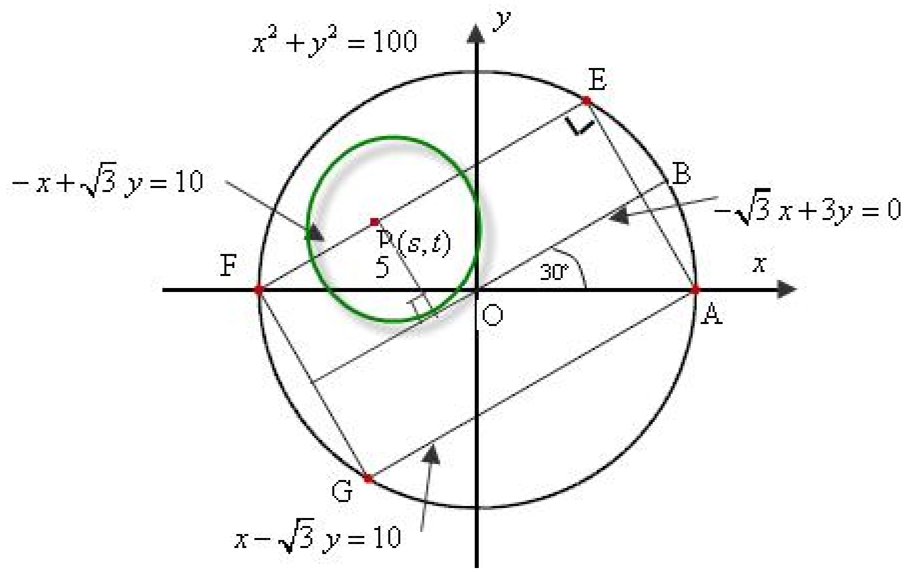
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $\mathrm{P}(s,t)$ **- נקודה על המקום הגיאומטרי.**

$\mathrm{P}(s,t)$ **היא מרכז מעגל שהיקפו שווה למחצית היקף המעגל הנתון,**

$x^2+y^2=100$ **שרדיוסו** 10 **ומרכזו בראשית הצירים.**

לכן רדיוס המעגל המשיק שווה ל- 5 **וזה גם מרחק** $\mathrm{P}(s,t)$

מהישר OB**. משוואת הישר** OB **היא** $y=\tan 30°x$ **, או** $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ **וצורתה הכללית היא** $-\sqrt{3}\,x+3y=0$ **.**

כיוון ש- $\mathrm{P}(s,t)$ **במרחק קבוע מהישר** OB**, הרי שישר זה הוא המקביל האמצעי לשני הישרים של המקום הגיאומטרי המבוקש, ובהתאם משוואת המקום הגיאומטרי היא** $-\sqrt{3}\,x+3y+c=0$ **.**

$$5=\frac{|c-0|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+3^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{12}}=\frac{|c|}{2\sqrt{3}}\quad\rightarrow 10\sqrt{3}=|c|$$

$$c=10\sqrt{3}\quad\rightarrow -\sqrt{3}\,x+3y+10\sqrt{3}=0\qquad\rightarrow \boxed{-x+\sqrt{3}\ y=10}$$

$$c=-10\sqrt{3}\quad\rightarrow -\sqrt{3}\,x+3y+10\sqrt{3}=0\qquad\rightarrow \boxed{x-\sqrt{3}\ y=10}$$

תשובה: $-x+\sqrt{3}\ y=10$ **,** $x-\sqrt{3}\ y=10$

ב. נשים לב (ע"י הצבה) שהנקודות $\mathrm{A}(10,0)$ **ו-** $\mathrm{F}(-10,0)$ **מקיימת את משוואת המקום הגיאומטרי,**

ובהתאם המרובע AEFG **המתקבל הוא מלבן (זוויות היקפיות הנשענות על קוטר הן ישרות,**

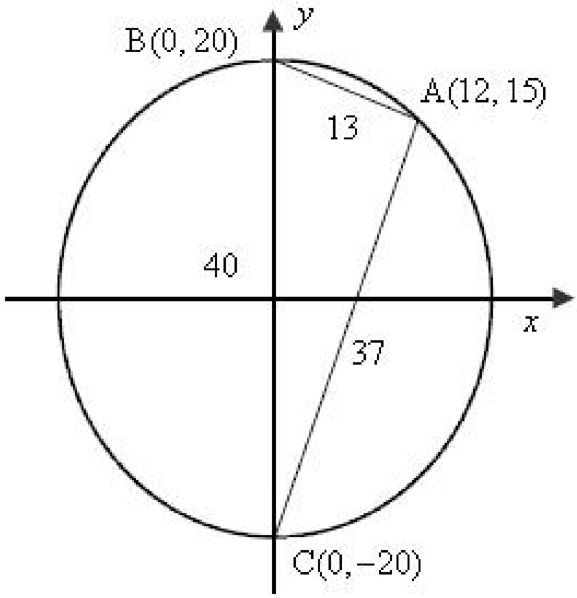
ושתי הזוויות הישרות האחרות נובעות מההקבלה בין הישרים)

ע"פ משפט פיתגורס: $\mathrm{FE}=\sqrt{20^2-10^2}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$

ושטח המלבן הוא : $10\cdot 10\sqrt{3}=100\sqrt{3}$

תשובה: שטח המרובע הוא $100\sqrt{3}$ יח"ר

א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



האליפסה סימטרית לצירים, ולכן ראשית הצירים היא אמצע המיתר BC **,**

נתון כי $BC = 40$ **ובהתאם** $B(0, 20),\quad C(0,-20)$ **, כאשר** $\boxed{b = 20}$

נתון גם: $BC = 40$ **,** $AC = 37$

$$-\begin{cases}(x-0)^2+(y+20)^2=1369\\(x-0)^2+(y-20)^2=169\end{cases}$$

$$(y+20)^2-(y-20)^2=1200$$

$$(y+20+y-20)\,(y+20-y+20)=1200$$

$$80y=1200$$

$$y=15\quad\to x^2+(15-20)^2=169\quad\to x=\pm12$$

A **ברביע הראשון, לכן שיעוריה** $A(12,15)$ **.**

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת האליפסה

$$\frac{12^2}{a^2}+\frac{15^2}{400}=1$$

$$\frac{144}{a^2}=\frac{7}{16}$$

$$a^2=329.14$$

תשובה: $\frac{x^2}{329.14}+\frac{y^2}{400}=1$

ב. מהנקודה $A(12,15)$ **מורידים אנך לציר ה-** x **שחותך אותו בנקודה** $F(12,0)$

כיוון שזהו המוקד הימני של ההיפרבולה הרי ש- $\boxed{c=12}$

האנך חותך את האסימפטוטות של ההיפרבולה בנקודות M **ו-** N **,**

כאשר $MN=24$ **. עקב הסימטריות של האסימפטוטות לצירים,**

הרי ששיעורי הנקודות $N(12,-12),\quad (12,12)$

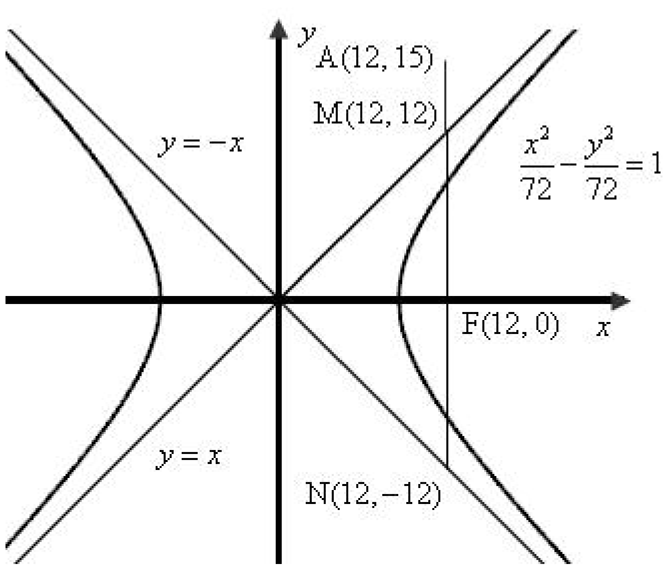
ובהתאם משוואות האסימפטוטות הן $y=\pm x$

וההיפרבולה שוות שוקיים.

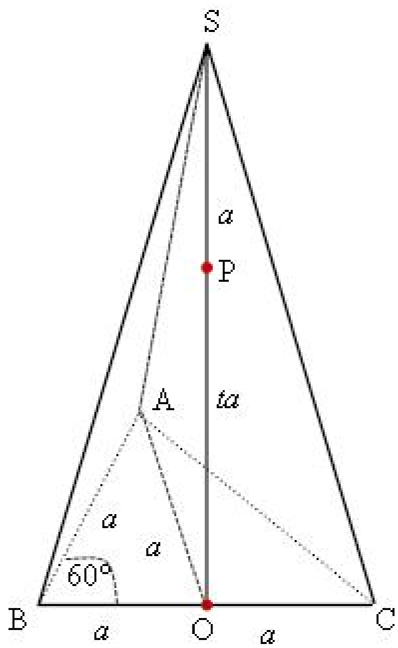
בהיפרבולה מתקיים: $a^2+b^2=c^2$ **,**

כלומר $2a^2=144\quad\to a^2=72\quad\to b^2=72$

תשובה: $\frac{x^2}{72}-\frac{y^2}{72}=1$



א. נתון כי $t\overrightarrow{SO}=(1+t)\overrightarrow{PO}$



$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{SO}-\overrightarrow{SP}$

$\overrightarrow{PO}=\frac{1+t}{t}\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{SP}$

$t\overrightarrow{PO}=(1+t)\overrightarrow{PO}-t\overrightarrow{SP}$

$t\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PO}+t\overrightarrow{PO}-t\overrightarrow{SP}$

$\boxed{\overrightarrow{PO}=t\overrightarrow{SP}}$

תשובה: $\overrightarrow{PO}=t\overrightarrow{SP}$

ב. נתון כי נתון כי נפח הפירמידה SABC **הוא** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$ **.**

ונתון כי $AB=BO=SP=a$ **, כאשר** O **מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה.**

ולכן גם $AO=CO=a$ **, ומכאן שמשולש** ABO **הוא שווה צלעות, עם זוויות** $60°$ **,**

כאשר AO **תיכון לצלע** BC**.**

SO **הוא גובה הפירמידה, כאשר** $SO=a+ta=a(1+t)$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\cancel{3}}a^3=\frac{a\cdot\cancel{2}a\cdot\sin 60°\cdot a(1+t)}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}}$$

$$2\sqrt{3}\,a^3=\frac{a^3\sqrt{3}(1+t)}{2}$$

$$4=t+1$$

$$\boxed{t=3}$$

תשובה: $t=3$

ג. SO **הוא גובה הפירמידה, כאשר בסיס הפירמידה הוא המישור** $z=0$ **.**

נתון כי $a=8$ **, לכן** $PO=24$ **, כלומר שיעורי הנקודה** $P(0,0,24)$ **.**

משוואת המישור המקביל לבסיס היא, אם כך, $z=24$ **.**

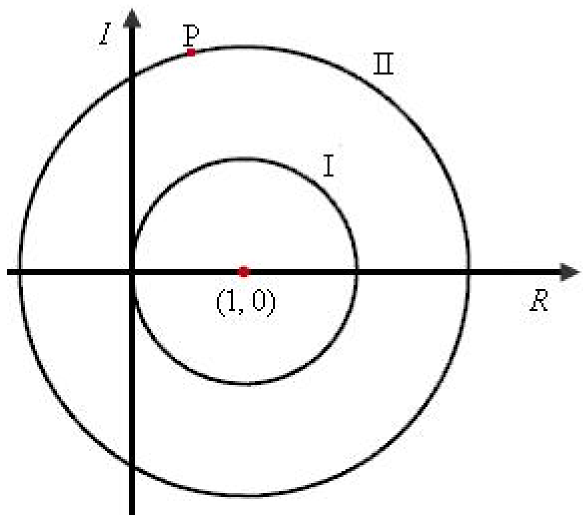
וההצגה הפרמטרית, של מישור הנפרש ע"י וקטורי היחידה, $\underline{(1,0,0)}$, $\underline{(0,1,0)}$

היא: $\boxed{(0,0,24)+t(1,0,0)+s(0,1,0)}$

תשובה: $(0,0,24)+t(1,0,0)+s(0,1,0)$

א. נתון כי I. $\frac{1}{z}+\frac{z}{|z|^2}=1$ **ו-** II. $z\cdot\bar{z}-(\bar{z}+z)=3$

נסמן $z=a+bi$



$$\frac{1}{z}+\frac{z}{|z|^2}=1$$
$$\frac{1}{a+bi}+\frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}^{\,2}}=1$$
$$\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}+\frac{a+bi}{a^2+b^2}=1$$
$$\frac{a-bi}{a^2+b^2}+\frac{a+bi}{a^2+b^2}=1$$
$$a-bi+a+bi=a^2+b^2$$
$$a^2+b^2-2a=0$$
$$(a-1)^2+b^2=1$$

I **- מעגל שמשוואתו** $(x-1)^2+y^2=1$ **, מרכזו בנקודה** $(1,0)$ **ורדיוסו** 1

$$z\cdot\bar{z}-(\bar{z}+z)=3$$
$$(a+bi)(a-bi)-(a-bi+a+bi)=3$$
$$a^2+b^2-2a=3$$
$$(a-1)^2+b^2=4$$

II **- מעגל שמשוואתו** $(x-1)^2+x^2=4$ **, מרכזו בנקודה ורדיוסו** 2

מכאן ששני המעגלים מרכזיים (בעלי מרכז משותף) ונקודה P **שעל המעגל החיצוני, *לא* תהייה על** I

תשובה: *לא*

ב. הנקודה $z=1+yi$ **נמצאת על המקום הגיאומטרי** I **ברביע הראשון, והיא אחד מפתרונות המשוואה** $z^4=a$ **.**

נציב את $z=1+yi$ **במשוואת המעגל** $(1-1)^2+y^2=1 \quad \to y=\pm1$ **, לכן** $z=1+i$ **, כי נמצאת ברביע הראשון.**

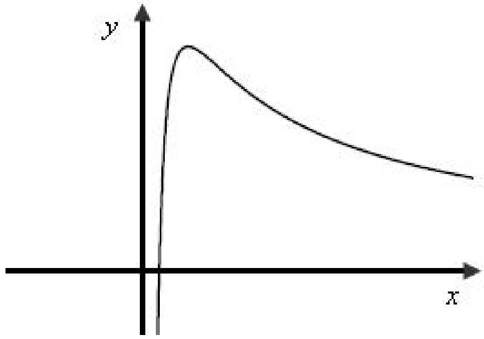
$$(1+i)^4=a \quad \to (2i)^2=a \quad \to a=-4$$

נפתור את המשוואה $z^4=-4$

$$z^4=4cis180°$$
$$z_k=\sqrt[4]{4}\,cis(\frac{180°}{4}+\frac{360°k}{4})$$
$$z_k=\sqrt{2}\,cis(45°+90°k)$$
$$z_0=\sqrt{2}\,cis45°=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=1+i,\quad z_1=\sqrt{2}\,cis135°=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=-1+i$$
$$z_2=\sqrt{2}\,cis225°=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=-1-i,\quad z_3=\sqrt{2}\,cis315°=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=1-i$$

תשובה: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(ax)}{x}$ **,** $a>0$ **נמצא**



$f'(x)=$ ...

$f'(x)=$ ...

$0=1-\ln$ ...

$\ln(ax)=1$

$ax=e$

$x=\frac{e}{a} \quad \to f(x)=\frac{\ln(e)}{\frac{e}{a}}=\frac{a}{e} \quad \to (\frac{e}{a},\frac{a}{e})$

$f'(\frac{0.5e}{a})=1-\ln(0.5e)=-\ln 0.5>0,\ f'(\frac{2e}{a})=1-\ln(0.5e)=-\ln 2<0 \quad \to Max$

תשובה: $(\frac{e}{a},\frac{a}{e})$

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{\ln^2(ax)}{x}$, $a>0$ **נמצא את נקודת הקיצון:**

$f'(x)=\frac{2\ln(ax)\cdot\frac{ax}{ax}-\ln(ax)}{x^2}$

$\boxed{f'(x)=\frac{2\ln(ax)-\ln^2(ax)}{x^2}}$

$0=\ln(ax)\cdot(2-\ln(ax))$

$\ln(ax)=0 \quad \to ax=1 \quad \to x=\frac{1}{a} \quad \to f(x)=\frac{\ln^2(1)}{\frac{1}{a}}=0 \quad \to (\frac{1}{a},0)$

$\ln(ax)=2 \quad \to ax=e^2 \quad \to x=\frac{e^2}{a} \quad \to f(x)=\frac{\ln^2(e^2)}{\frac{e^2}{a}}=\frac{4a}{e^2} \quad \to (\frac{e^2}{a},\frac{4a}{e^2})$

$f'(\frac{1}{2a})=\ln(0.5)\cdot(2-\ln(0.5))<0$

$f'(\frac{e}{a})=\ln(e)\cdot(2-\ln(e))>0$

$f'(\frac{2e^2}{a})=\ln(2e^2)\cdot(2-\ln(2e^2))<0$

תשובה: $(\frac{1}{a},0)$ **מינימום ,** $(\frac{e^2}{a},\frac{4a}{e^2})$ **מקסימום**

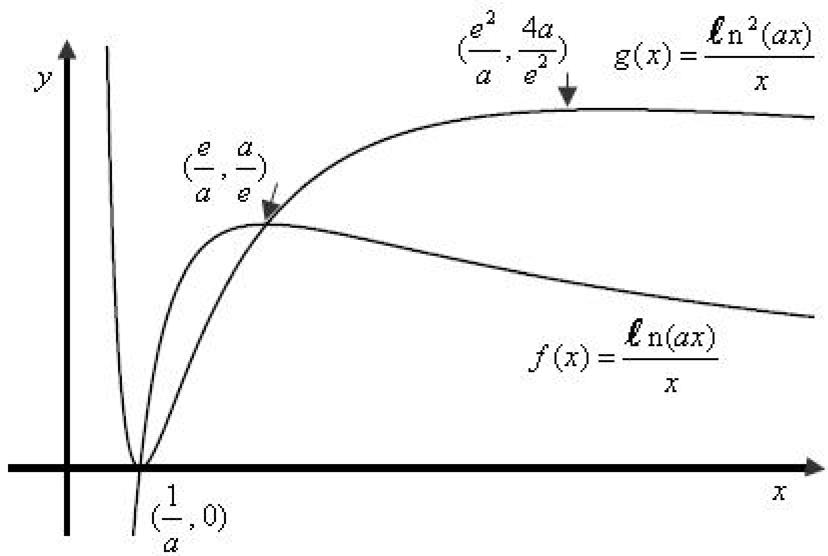
ג. (1) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין $f(x)=\frac{\ell n(ax)}{x}$ ל- $g(x)=\frac{\ell n^2(ax)}{x}$

$$\ell n(ax)=\ell n^2(ax) \quad \to \ell n(ax)\cdot(1-\ell n(ax))=0$$

$$\ell n(ax)=0 \quad \to (\frac{1}{a},0) \quad or \quad \ell n(ax)=1 \quad \to (\frac{e}{a},\frac{a}{e})$$

תשובה: $(\frac{1}{a},0)$, $(\frac{e}{a},\frac{a}{e})$

(2) הסקיצה המבוקשת



ד. נחשב את האינטגרל, תוך כדי זיהוי הנגזרת הפנימית של המונה.

$$S=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}(\frac{\ell n(ax)}{x}-\frac{\ell n^2(ax)}{x})dx=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}(\ell n(ax)\cdot\frac{1}{x}-\ell n^2(ax)\cdot\frac{1}{x})dx$$

$$S=(0.5\ell n^2(ax)-\frac{1}{3}\ell n^3(ax)\Big]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}$$

$$S=(0.5\ell n^2 e-\frac{1}{3}\ell n^3(e))-(0.5\ell n^2 1-\frac{1}{3}\ell n^3 1)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(0-0)$$

$$S=\frac{1}{6}$$

תשובה: $\frac{1}{6}$ **יח"ר**