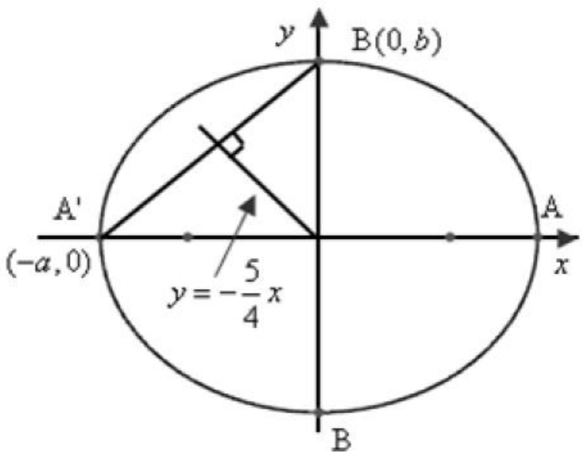


א. נתונה משוואת האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **.**

שיעורי הנקודות B, A' **שעל הצירים:** $A'(-a,0)$, $B(0,b)$

והשיפוע ביניהן: $m_{A'B}=\frac{b-0}{0+a}=\frac{b}{a}$

משוואת הישר המאונך לישר $A'B$ **היא** $y=-\frac{5}{4}x$ **,**

ולכן על פי תנאי ניצבות $m_{A'B}=\frac{4}{5}$ **.**

מרחק הנקודה B **לאחד המוקדים הוא** 5**,**

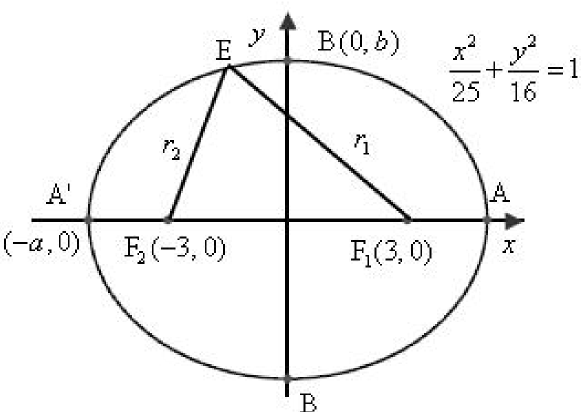
ובהתאם לנוסחת מרחק $5=\sqrt{(0-c)^2+(b-0)^2}$ ← $b^2+c^2=25$ **.**

באליפסה מתקיים $a^2=b^2+c^2$ **ולכן** $a=5$ **ומכאן ש-** $b=4$ **.**

(ניתן גם המרחק מהמוקד הוא רדיוס וקטור $r_1=r_2=5$ **,**

משיקולי סימטריה של הנקודה B **למוקדים,**

ומכיוון ש- $r_1+r_2=2a$ **נקבל ש-** $a=5$.



תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **.**

ב. סכום מרחקי נקודה שעל האליפסה משני המוקדים קבוע ושווה ל $2a$ **.**

($r_1+r_2=2a$**)**

אורך הצלע שבין המוקדים שווה ל- $2c$**,** $c^2=a^2-b^2=9$ ← $c=3$ **.**

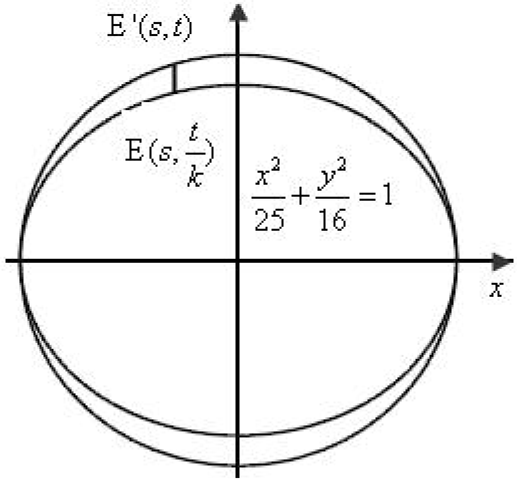
בהתאם, היקף המשולש הוא $10+2\cdot3=16$**.**

תשובה: היקף המשולש EF_1F_2 **הוא** 16 **יחידות.**

ג. (1) אם נקרב את שני מוקדי האליפסה, כאשר הציר הגדול קבוע, הרי שהאליפסה תימתח ($k>1$),

ובמקרה שהמוקדים יתלכדו זה עם זה, נקבל ש $a=b$ והאליפסה תהפוך למעגל קנוני $x^2+y^2=25$.

נסמן את שיעורי הנקודה שעל האליפסה החדשה $E'(s,t)$.



EE' מקביל לציר ה- y ולכן $x_E=x_{E'}=s$,

כאשר על פי הנתון $y_E=\frac{y_{E'}}{k}=\frac{t}{k}$.

נציב את שיעורי הנקודה $E(s,\frac{t}{k})$ במשוואת האליפסה

ונקבל $\frac{s^2}{25}+\frac{t^2}{16k^2}=1$.

תשובה: משוואת האליפסה החדשה היא $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16k^2}=1$

(2) על פי ההסבר בתחילת הסעיף הקודם $16k^2=25$ ומכאן ש: $k=1.25 \quad k>1\rightarrow$.

תשובה: $k=1.25$

א. משוואת מישור בסיס הפירמידה , $2x+2y-z-4=0$

הצגה פרמטרית של הישר TB **היא:** $\underline{x}=(1,2,-7)+t(3,2,1)$

כלומר נקודה טיפוסית עליו היא $(1+3t,2+2t,-7+t)$ **.**

למציאת שיעורי הקדקוד B **נציב את שיעורי הנקודה במשוואת מישור הבסיס.**

$2\cdot(1+3t)+2\cdot(2+2t)-(-7+t)-4=0 \quad \to t=-1 \quad \to \boxed{\mathrm{B}(-2,0,-8)}$ **.**

תשובה: $\mathrm{B}(-2,0,-8)$

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=z=0$

ואם נציב במשוואת המישור נקבל: $2x+2\cdot0-0-4=0 \quad \to x=2 \quad \to (2,0,0)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- z **מתקיים** $x=y=0$

ואם נציב במשוואת המישור נקבל: $2\cdot0+2\cdot0-z-4=0 \quad \to z=-4 \quad \to (0,0,-4)$

כיוון שאלכסוני המקבילית חוצים זה את זה, הרי ששיעורי $\mathrm{M}(0,0,-4)$ **, ו-** $\mathrm{D}(2,0,0)$ **,**

ובמקרה זה נקבל $\mathrm{M}(\frac{2-2}{2},\frac{0+0}{2},\frac{0-8}{2})$ **.**

תשובה: הנקודה D **נמצאת על ציר ה-** x **.**

ג. (1) הישר BE **מאונך לאנך למישור היורד מהישר** TB **,**

כלומר הווקטור $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ **מאונך לווקטור** $\underline{x}=(2,2,-1)$ **, ווקטור הנורמל של המישור.**

הנקודה $(1,2,-7)$ **נמצאת על הישר** TB **, כאשר ווקטור המקדמים של משוואת המישור הוא נורמל לבסיס,**

לכן הצגה פרמטרית של האנך למישור היא $\underline{x}=(1,2,-7)+p(2,2,-1)$

כלומר נקודה טיפוסית עליו (כמו הנקודה E **) היא** $(1+2p,2+2p,-7-p)$ **.**

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\underline{\mathrm{E}}-\underline{\mathrm{B}} \;=\underline{x}=(3+2p,2+2p,1-p)$ **.**

המכפלה הסקלרית של ווקטורים מאונכים שווה ל- 0 **:** $(3+2p,2+2p,1-p)\,(2,2,-1)=0$ **,**

ומכאן $p=-1 \;\leftarrow\; \mathrm{E}(-1,0,-6)$ **, כאשר** $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(1,0,2)$ **.**

תשובה: הצגה פרמטרית של הישר BE **היא** $\underline{x}=(-2,0,-8)+p(1,0,2)$ **.**

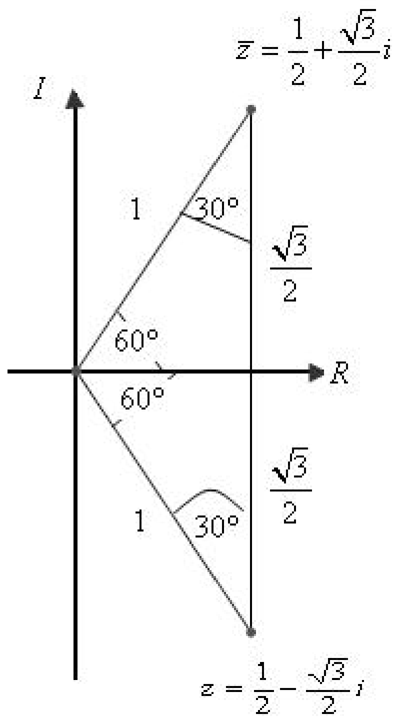
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\underline{\mathrm{D}}-\underline{\mathrm{B}} \;=\underline{x}=(4,0,8)$ **, וקל לראות שזהו וקטור עם כיוון זהה לווקטור** $\underline{(1,0,2)}$ **.**

לשני הישרים, BE **ו-** BD **, נקודה משותפת** B **, ולכן הם מתלכדים.**

תשובה: הישר BE **מתלכד עם האלכסון** BD **.**

(1) $z=a+bi$ **הוא מספר מרוכב הנמצא ברביעי הרביעי (** $a>0,\ b<0$ **).**

הערך המוחלט של z **הוא** 1 **ולכן** $a^2+b^2=1$ **.**



$$\left|1+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{3}$$

$$\left|1+\frac{1}{a+bi}\right|=\sqrt{3}$$

$$\left|1+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}\right|=\sqrt{3}$$

$$\left|1+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right|=\sqrt{3} \qquad \to\left|1+\frac{a-bi}{1}\right|=\sqrt{3}$$

$$|1+a-bi|=\sqrt{3} \quad \to(1+a)^2+b^2=3$$

$$1+2a+a^2+b^2=3 \quad \to 1+2a+1=3$$

$$2a=1$$

$$a=\frac{1}{2} \quad \to(\frac{1}{2})^2+b^2=1 \quad \to b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow b<0$$

$$\boxed{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} \quad \to \boxed{\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

המשולש $O\,z_1\bar{z}$ **הוא שווה שוקיים, כאשר צלע אחת מקבילה לציר ה-** y **(שיעורי** x **שווים),**

ואורכי שתי הצלעות האחרות שווים ל- 1 **כי** z **ו-** $\bar{z}$ **נמצאים על מעגל היחידה.**

$$\tan^{-}_{\bar{z}}=\frac{0.5\sqrt{3}}{0.5}=\sqrt{3}\to{}^{-}_{\bar{z}}=60^\circ \quad (0^\circ<{}^{-}_{\bar{z}}<90^\circ)$$

ובהתאם זוויות המשולש הן $120^\circ,30^\circ,30^\circ$**, כי ציר ה-** x **חוצה את זווית הראש, וזוויות בסיס שוות במש"ש.**

תשובה: זוויות המשולש: $120^\circ,30^\circ,30^\circ$**.**

(2) אורך הצלע המקבילה לציר ה- y **:** $\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$ **, ואורכי הצלעות האחרות** 1 **על פי סעיף (1).**

תשובה: אורכי צלעות המשולש: $\sqrt{3}$ **,** 1 **,** 1**.**

(1) פאות הפירמידה הן משולשים שווי שוקיים חופפים, כי הבסיס הוא ריבוע,

והמקצועות הצדדיים שווים זה לזה בפירמידה ישרה.

הזווית ($2\sim$) שבין הפאות הצדדיות SBC ו- SDC

היא הזווית בין שני האנכים (הגבהים) לישר החיתוך (המקצוע SC).

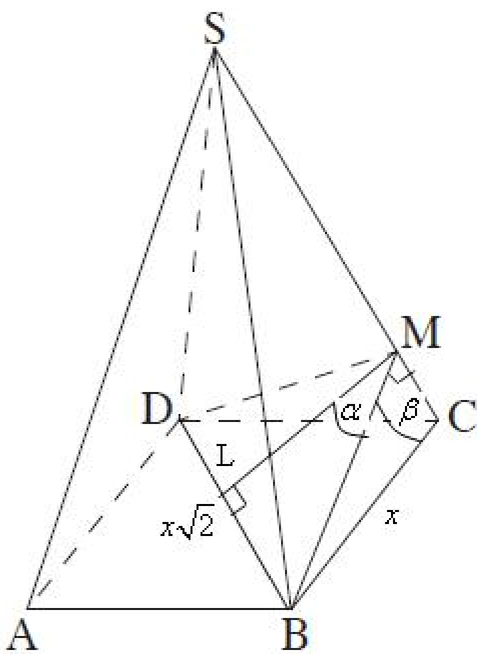
$\Delta DMC \cong \Delta BMC$ (משפט חפיפה רביעי צלע צלע זווית)

בהתאם הגבהים לשוקיים שווים באורכם – ו- ΔDMB שווה שוקיים

כאשר זווית הראש שלו, על-פי הנתון היא $2\sim$.

נסמן ב- x את מקצוע הבסיס ובהתאם, עפ"י משפט פיתגורס $BD = x\sqrt{2}$

נוריד גובה ML לבסיס המשולש, ולכן הוא גם תיכון וחוצה זווית הראש.



$\underline{\Delta BML}$

$$\sin \sphericalangle BML = \frac{BL}{MB}$$

$$(1) \quad \sin\sim = \frac{x\frac{\sqrt{2}}{2}}{MB}$$

$\underline{\Delta BMC}$

$$\sin \sphericalangle MCB = \frac{MB}{CB}$$

$$(2) \quad \sin \quad = \frac{MB}{x}$$

$$(1)\cdot(2) \quad \sin\sim \sin \quad = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

תשובה: $\sin\sim \sin \quad = \sin 45^\circ$

(2) אם $\sim = 45^\circ$, **נקבל ש:** $\sin \quad = 1$ **ולכן** $= 90^\circ$

וזה *לא* אפשרי כי היא זווית בסיס במשולש שווה שוקיים.

תשובה: *לא* ייתכן.

א. נתונה פונקציות הנגזרות $g'(x)=e^{f(x)}(x-\frac{3}{2})$ **, ו-** $f'(x)=2x-3$ **כאשר הפונקציות הקדומות מוגדרת לכל** x **.**

(1) ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ **בנקודת הקיצון, כלומר פונקציה קבועה,** $y=-0.25$ **,**

חותך את ציר ה- y **עבור** $y=-0.25$ **, כלומר זה שיעור ה-** y **בנקודת הקיצון.**

$f'(x)=2x-3$ **מתאפסת עבור** $x=1.5$ **, כאשר עוברת בנקודה זו משליליות חיוביות,**

ולכן שיעורי נקודת המינימום של $f(x)$ **הם** $(1.5,-0.25)$ **.**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-3)\,dx=x^2-3x+c$$

$$-0.25=1.5^2-3\cdot1.5+c\quad\to c=2\quad\to\boxed{f(x)=x^2-3x+2}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, לכן** $g'(0)=e^{0^2-3\cdot0+2}(0-1.5)=-1.5e^2$ **ובהתאם** $(0,-1.5e^2)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **, לכן שיעורי נקודת החיתוך** $(1,5,0)$ **, כי** $e^{f(x)}$ **חיובי לכל** x **.**

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של $g'(x)$ **עם הצירים הם:** $(0,-1.5e^2)$ **,** $(1,5,0)$ **.**

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה של $g'(x)=e^{x^2-3x+2}(x-1.5)$ **(תחומי קעירות של** $g(x)$ **)**

$$g''(x)=(2x-3)e^{x^2-3x+2}(x-1.5)+e^{x^2-3x+2}$$

$$g''(x)=e^{x^2-3x+2}(2(x-1.5)^2+1)$$

כיוון ששני הכופלים של פונקציית הנגזרת של $g'(x)$ **חיוביים לכל** x **, הרי שהפונקציה** $g'(x)$ **עולה לכל** x **.**

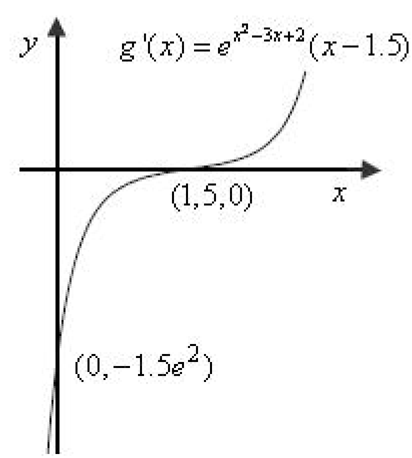
תשובה: עלייה: כל x **, ירידה: אף** x **.**

(3) נתון כי $g'''(x)<0$ **עבור** $x<1.5$ **לכן בתחום זה** $g'(x)$ **קעורה כלפי מטה.**

נתון כי $g'''(x)>0$ **עבור** $x>1.5$ **לכן בתחום זה** $g'(x)$ **קעורה כלפי מעלה.**

כלומר $(1,5,0)$ **היא נקודת פיתול של** $g'(x)$ **.**

סרטוט סקיצה:



ב. לישר $y=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1$ **ולפונקציה** $g(x)$ **יש נקודה משותפת אחת.**

על פי הסעיף הקודם, פונקציית הנגזרת $g'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות עבור** $x=1.5$ **,**

כלומר זה שיעור ה- x **של נקודת המינימום היחידה של** $g(x)$ **, המוגדרת לכל** x **, ולכן זהו מינימום מוחלט.**

מכאן ששיעור ה- y **של נקודה זו הוא** $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1$ **, כי עבור כל** y **גדול יותר יהיו שתי נקודות חיתוך עם פונקציה קבועה, ועבור כל** y **קטן מזה *לא* תהיינה נקודות חיתוך עם פונקציות קבועות.**

ולכן שיעורי נקודת המינימום של $g(x)$ **הם** $(1.5,\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1)$ **.**

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int (e^{x^2-3x+2}(x-1.5))\,dx=0.5e^{x^2-3x+2}+c$$

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1=0.5e^{1.5^2-3\cdot1.5+2}+c$$

$$0.5e^{-\frac{1}{4}}+1=0.5e^{-\frac{1}{4}}+c \quad\rightarrow c=1 \quad\rightarrow \boxed{g(x)=0.5e^{x^2-3x+2}+1}$$

תשובה: $g(x)=0.5e^{x^2-3x+2}+1$ **.**

א. ביום הנטיעה היו ביער I $10,000$ **טון עץ וכעבור שנה היו בו** $15,000$ **טון עץ.**

לכן, שיעור הגדילה השנתי $a=\frac{15,000}{10,000}=1.5$ **(** 50% **לשנה) ו-** $f(x)=10,000\cdot 1.5^x$ **(** x **- מספר השנים שעוברות).**

ביום הנטיעה היו ביער II $40,000$ **טון עץ וכעבור שנה היו בו** $45,000$ **טון עץ.**

לכן, שיעור הגדילה השנתי $b=\frac{45,000}{40,000}=1.125$ **(** 12.5% **לשנה) ו-** $g(x)=40,000\cdot 1.125^x$ **.**

תשובה: $f(x)=10,000\cdot 1.5^x$ **,** $g(x)=40,000\cdot 1.125^x$ **.**

ב. נמצא כעבור כמה זמן סיום הנטיעה יהיה משקל העץ ביער I **גדול ממשקל העץ ביער** II **.**

$$f(x)>g(x)$$

$$10,000\cdot 1.5^x>40,000\cdot 1.125^x \quad /:10000\cdot 1.125^x>0$$

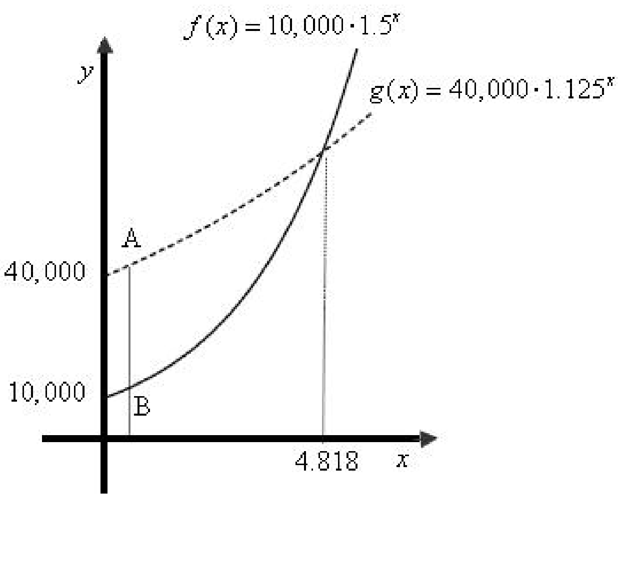
$$(\frac{4}{3})^x>4 \quad \to \ell n(\frac{4}{3})^x>\ell n 4$$

$$x\ell n(\frac{4}{3})>\ell n 4 \quad /:\ell n(\frac{4}{3})>0$$

$$x>\frac{\ell n 4}{\ell n(\frac{4}{3})} \quad \to \boxed{x>4.818}$$

תשובה: כעבור יותר מ- 4.82 **שנים.**

ג. הסרטוט המתאים משמאל (כולל עבור סעיף ד).



ד. הפונקציה שיש להביא למקסימום היא אורך הקטע AB **,**
המייצג את הפרש משקלי העץ בשני היערות, כעבור x **שנים.**

$$\boxed{AB=40,000\cdot 1.125^x-10,000\cdot 1.5^x}$$

$$\boxed{(AB)'(x)=40,000\cdot 1.125^x\cdot \ell n1.125-10,000\cdot 1.5^x\cdot \ell n1.5}$$

$$0=40,000\cdot 1.125^x\cdot \ell n1.125-10,000\cdot 1.5^x\cdot \ell n1.5$$

$$1.5^x\cdot \ell n1.5=4\cdot 1.125^x\cdot \ell n1.125$$

$$(\frac{4}{3})^x=\frac{4\cdot \ell n1.125}{\ell n1.5} \quad \to (\frac{4}{3})^x=1.162$$

$$x=\frac{\ell n1.162}{\ell n(\frac{4}{3})}$$

$$\boxed{x=0.52}$$

$$(AB)''(x)=40,000\cdot 1.125^x\cdot \ell n^2 1.125-10,000\cdot 1.5^x\cdot \ell n^2 1.5$$

$$(AB)''(0.52)=-1,440<0 \quad \to \max$$

תשובה: כעבור 0.52 **שנים.**