נסמן ב- x את מהירות המשאית שיצאה מעיר A (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות המכונית שיצאה מעיר B (קמ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק מעיר A לעיר B (ק"מ)

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
עד מפגש ראשון	משאית	2	x	$2x$
	מונית	2	y	$2y$
ממפגש ראשון עד מפגש שני	משאית	$2\frac{2}{3}$	x	$2\frac{2}{3}x$
	מונית	$2\frac{2}{3}$	y	$2\frac{2}{3}y$
מיציאה עד מפגש שלישי	משאית	$\frac{s-40}{x}$	x	$s-40$ עד 40 ק"מ מעיר B
	מונית	$\frac{2s+40}{y}$	y	$2s+40$ הלוך ושוב, ועוד 40 ק"מ

עד המפגש הראשון עברו שני כלי הרכב את כל הדרך: $2x+2y=s$.

מהמפגש הראשון עד המפגש השני עברה המונית

(עד עיר A) את המרחק שעברה המשאית מתחילת התנועה עד המפגש הראשון,

וגם את המרחק (מעיר A) שעברה המשאית מהתחלה עד המפגש השני : $2\frac{2}{3}y=2x+2x+2\frac{2}{3}x$.

הזמנים שעברו שני כלי הרכב מיציאה עד למפגש שלישי, 40 ק"מ מעיר B, שווים $\frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y}$

$$\begin{cases} (1) \quad 2x+2y=s \\ (2) \quad 2\frac{2}{3}y=4x+2\frac{2}{3}x \quad \to y=2.5x \\ (3) \quad \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y} \end{cases}$$

$$(2),(3) \quad \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{2.5x} \quad /\cdot 2.5x$$

$$2.5s-100=2s+40$$

$$0.5s=140$$

$$\boxed{s=280}$$

$$(1),(2) \ 2x+2\cdot 2.5x=280$$

$$7x=280$$

$$\boxed{x=40} \quad \boxed{y=100}$$

תשובה: מהירות המשאית 40 קמ"ש.

1. נבדוק עבור $n=1$:

אגף ימין: $\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ $\geq$ אגף שמאל: $a_1=\frac{1}{2}$

לכן, הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה), כלומר: $a_k \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל

$$a_{k+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}}\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{2\sqrt{k}}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)} \geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הקטן ממנו (הביטויים המודגשים עם קו מתחת),
לכן, די אם נוכיח את אי השוויון החדש.
כיוון שכל אחד מהביטויים שבאגף שמאל ובאגף ימים חיוביים (עבור k טבעי)
ניתן להעלות בריבוע את שני האגפים.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4k}\cdot\frac{(2k+1)^2}{4(k+1)^2} \geq \frac{1}{4(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4(k+1)}}\cdot\frac{(2k+1)^2}{4(k+1)} \geq \boxed{\frac{1}{4(k+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4k^2+4k+1}{4(k+1)} \geq 1$$

כיוון ששני הביטויים במסגרת שווים, די אם נוכיח את אי השוויון החדש

$$\Leftrightarrow 4k^2+4k+1 \geq 4k+4$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 \geq 3$$

כאשר עבור כל k טבעי אי שוויון זה נכון.
מתקבל שאגף שמאל גדול או שווה מאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$, הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו
אז היא נכונה עבור $n=k+1$ לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. צ"ל כי $a_1+a_2+a_3+...+a_n \ge \frac{n}{2\sqrt{n}}$

על פי סעיף א אי השוויון השמאלי נכון בכל אחת מהשורות הבאות,

כאשר במעבר לביטוי הימני המכנה גדל והביטוי קטן (למעט בשורה האחרונה).

(כיוון שלא ידוע ערכו של n, השאר רשום בכל אחת מהשורות הראשונות $\ge$.)

$$a_1 \ge \frac{1}{2\sqrt{1}} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$a_2 \ge \frac{1}{2\sqrt{2}} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$a_3 \ge \frac{1}{2\sqrt{3}} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$...$$

$$a_n \ge \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ולכן $a_1+a_2+a_3+...+a_n \ge \frac{n}{2\sqrt{n}}$

תשובה: הוכַח.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0

$\sqrt{2x}-2\neq 0$ **, לכן** $x\neq 4$ **וגם** $2x\geq 0$ **ובהתאם** $x\geq 0$.

תשובה: תחום ההגדרה: $x\geq 0,\ x\neq 4$.

(2) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$x>0 \rightarrow \quad f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=\frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=+\infty \quad , \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{\sqrt{2x}-2}=-\infty \quad \rightarrow \boxed{x=2}$$

תשובה: אסימפטוטה אנכית: $x=2$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

(3) בנקודת חיתוך עם ציר y **מתקיים, כי** $x=0$ **ונקודת החיתוך היא** $(0,0)$.

זו גם נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה- x .

תשובה: $(0,0)$.

(4) $(0,0)$ **היא נקודת קצה, ולכן תהיה גם נקודת קיצון.**

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x}-2-\frac{2x}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x}-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x}-2-0.5\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x}-2)^2} \quad \leftarrow x>0$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{0.5\sqrt{2x}-2}{(\sqrt{2x}-2)^2}} \quad \leftarrow x>0$$

$$0=0.5\sqrt{2x}-2$$

$$4=\sqrt{2x}$$

$$2x=16$$

$$x=8 \quad \rightarrow 4=\sqrt{2\cdot 8} \quad \rightarrow 4=4 \quad \rightarrow o.k.$$

$$f(8)=\frac{8}{\sqrt{2\cdot 8}-2}=4 \quad \rightarrow (8,4)$$

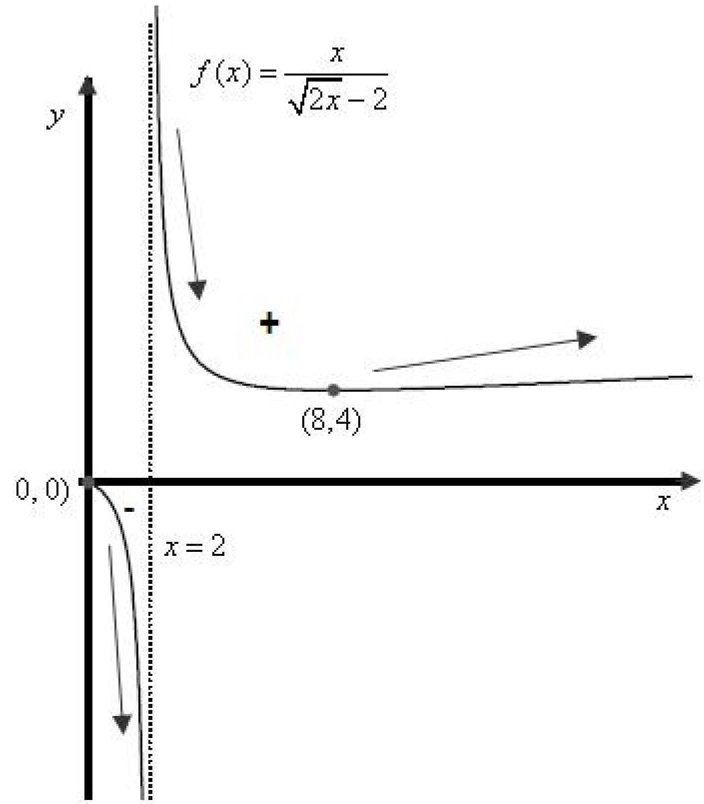
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}-2}=-1,\quad f(7)=\frac{7}{\sqrt{2\cdot 7}-2}=4.02,\quad f(1)=\frac{9}{\sqrt{2\cdot 9}-2}=4.01$$

x	0	1	2	7	8	9
$f(x)$	0	-1		4.02	4	4.01
$f'(x)$						
מסקנה	Max	↘		↘	Min	↗

תשובה: $(0,0)$ **מקסימום ,** $(8,4)$ **מינימום.**

(5) הסקיצה המתאימה (כולל סימונים עבור סעיף ב):



ב. נתון כי $g'(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **, כאשר** $g(x)$ **מוגדרת בתחום ההגדרה של** $f(x)$ **.**

$g(x)$ **עולה כאשר** $g'(x)>0$ **, כלומר כאשר** $f(x),\ f'(x)$ **שווי סימן.**

על פי טבלת עלייה וירידה, וגם הסקיצה של $f(x)$ **-**

זה מתקיים עבור $x>8$ **כאשר** $f(x)$ **חיובית, ועולה (כלומר** $f'(x)>0$ **)**

ועבור $0<x<2$ **כאשר** $f(x)$ **שלילית ויורדת (כלומר** $f'(x)<0$ **).**

$g(x)$ **יורדת כאשר** $g'(x)<0$ **, כלומר כאשר** $f(x),\ f'(x)$ **שוני סימן.**

ובהתאם עבור $2<x<8$ **, כאשר** $f(x)$ **חיובית, אולם יורדת (כלומר** $f'(x)<0$ **).**

תשובה: עליה: $x>8$ **או** $0<x<2$ **, ירידה:** $2<x<8$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}$ **בתחום** $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$ **.**

$16\sin x+9$ **חיובי לכל** x **כי** $-1\le\sin x\le 1$ **ולכן הפונקציה מוגדרת בכל התחום** $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$

מכנה הפונקציה חיובי, לכן סימן הפונקציה נקבע על ידי המונה.

$a>0$ **לכן** $-a<0$ **ומכאן שכאשר** $\cos x>0$ **הפונקציה שלילית, וכאשר** $\cos x<0$ **הפונקציה חיובית.**

(1) $f(x)>0$ **עבור** $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{6}$ **.**

(2) $f(x)<0$ **עבור** $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ **.**

ב. נחשב את האינטגרל המסוים $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx$

נשים לב כי $(16\sin x+9)'=16\cos x$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=$$

$$-2a\sqrt{16\sin x+9}\,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}=$$

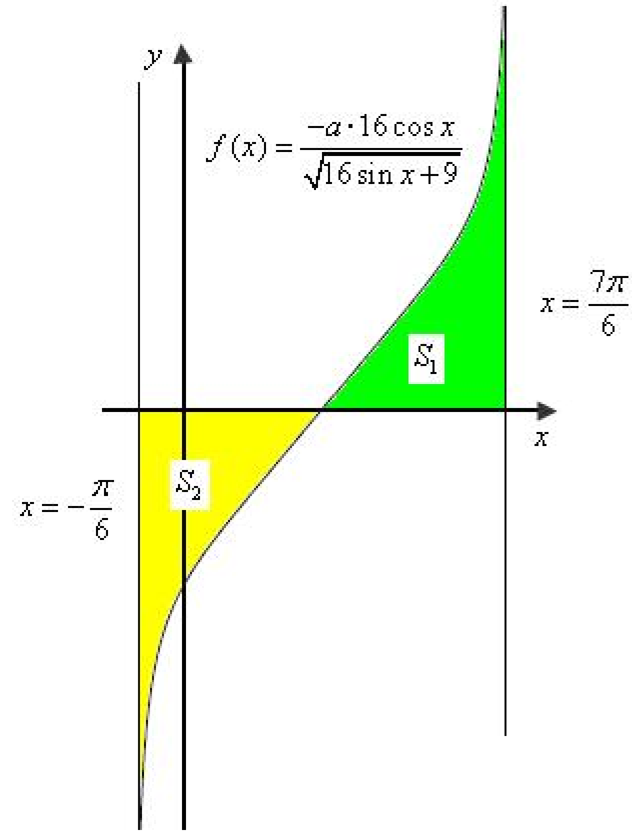
$$-2a\left(\sqrt{16\sin\frac{7\pi}{6}+9}-\sqrt{16\sin(-\frac{\pi}{6})+9}\right)=$$

$$-2a(1-1)=0$$

תשובה: ערך האינטגרל המסוים הוא 0 **.**

ג. נצייר את הסקיצה המתאימה של $f(x)$, על פי תחומי החיוביות והשליליות הנתונים,

כולל סימון הישרים: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{6}$ **.**



כיוון שהראינו כי $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}\,dx=0$ **, הרי ש-** $S_1=S_2$ **.**

גודל השטח הכולל הוא 8 **, לכן** $S_1=S_2=4$ **.**

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{-a \cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x + 9}}\, dx =$$

$$S_1 = -2a\sqrt{16\sin x + 9}\,\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{-a \cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x + 9}}\, dx =$$

$$S_1 = -2a\sqrt{16\sin x + 9}\,\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

$$S_1 = -2a\left(\sqrt{16\sin\frac{7\pi}{6} + 9} - \sqrt{16\sin(\frac{\pi}{2}) + 9}\right)$$

$$S_1 = -2a(1-5)$$

$$S_1 = 8a$$

$$S_1 = -2a(1-5)$$

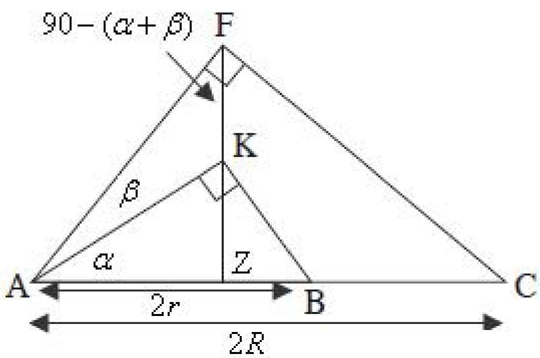
$$S_1 = 8a$$

לכן, $8a = 4$ **ו-** $a = 0.5$ **.**

תשובה: $a = 0.5$

א. (1) שני המשולשים ΔAKB **ו-** ΔAFC **ישרי זווית.,**

לכן $AC=2R$ **ו-** $AB=2r$ **(קוטר נשען על זווית היקפית ישרה)**



$\underline{\Delta AKZ}$: $\cos\alpha=\frac{AZ}{AK}$

$\underline{\Delta AFZ}$: $\cos(\alpha+\beta)=\frac{AZ}{AF}$

וע"י חילוק המשוואות נקבל $\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{AF}{AK}$

תשובה: $\frac{AF}{AK}=\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

(2) $\underline{\Delta AKB}$: $\cos\alpha=\frac{AK}{2r}$

$\underline{\Delta AFC}$: $\cos(\alpha+\beta)=\frac{AF}{2R}$

וע"י חילוק המשוואות נקבל $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=\frac{AF}{AK}\cdot\frac{r}{R}$

נציב על פי (1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{r}{R}$ **ונקבל :** $\frac{R}{r}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$

תשובה: $\frac{R}{r}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$

ב. משפט סינוסים $\underline{\Delta AKF}$ **, כאשר** t **רדיוס המעגל החוסם משולש זה.**

$$\frac{AK}{\sin(90°-(\alpha+\beta))}=2t$$

$$\frac{2r\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)}=t$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}}\cdot r=t$$

$$\boxed{t=\sqrt{R}\sqrt{r}} \quad \leftarrow r>0$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את ΔAKF **הוא** $\sqrt{R}\sqrt{r}$ **יחידות.**