

נסמן ב- x את מהירות המשאית שיצאה מעיר A (ק"מ"ש, קבועה)

נסמן ב- y את מהירות המכונית שיצאה מעיר B (ק"מ"ש, קבועה)

נסמן ב- s את המרחק מעיר A לעיר B (ק"מ)

דרג-מרחק - s ק"מ	מהירות - v ק"מ"ש	זמן - t שעות		
$2x$	x	2	משאית	עד מפגש ראשון
$2y$	y	2	מונית	
$2\frac{2}{3}x$	x	$2\frac{2}{3}$	משאית	מפגש ראשון עד מפגש שני
$2\frac{2}{3}y$	y	$2\frac{2}{3}$	מונית	
$s-40$ עד 40 ק"מ מעיר B	x	$\frac{s-40}{x}$	משאית	מיציאה עד מפגש שלישי
$2s+40$ הלך ושוב, ועוד 40 ק"מ	y	$\frac{2s+40}{y}$	מונית	

עד המפגש הראשון עברו שני כלי הרכב את כל הדרך: $2x+2y=s$.

מהמפגש הראשון עד המפגש השני עברה המכונית

(עד עיר A) את המרחק שעברה המשאית מתחילת התנועה עד המפגש הראשון,

וגם את המרחק (מעיר A) שעברה המשאית מהתחלה עד המפגש השני: $2\frac{2}{3}y=2x+2\frac{2}{3}x$.

הזמנים שעברו שני כלי הרכב מיציאה עד למפגש שלישי, 40 ק"מ מעיר B, שווים $\frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y}$

$$\begin{cases} (1) & 2x+2y=s \\ (2) & 2\frac{2}{3}y=2x+2\frac{2}{3}x \rightarrow y=2.5x \\ (3) & \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y} \end{cases}$$

$$(2),(3) \quad \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{2.5x} \quad / \cdot 2.5x$$

$$2.5s-100=2s+40$$

$$0.5s=140$$

$$\boxed{s=280}$$

$$(1),(2) \quad 2x+2 \cdot 2.5x=280$$

$$7x=280$$

$$\boxed{x=40} \quad \boxed{y=100}$$

תשובה: מהירות המשאית 40 ק"מ"ש.

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

$$S_1 = a_1 = 1 \quad \text{אגף שמאל:} \quad \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1+1) = 1 \quad \text{אגף ימין:}$$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

$$\text{כלומר: } S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1),$$

$$\text{כאשר: } S_{k+1} = \frac{(k+1)[2 \cdot 1 + 2(k+1-1)]}{2}$$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)[2 \cdot 1 + 2(k+1-1)]}{2} = (k+1)^2 \quad \text{ולכן } a_1 = 1, d = 2$$

צ"ל:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k + S_{k+1} &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2(k+1)+1) \\ &\Downarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} (k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} (k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} (k+1)(2k^2 + 7k + 6) &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$, הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו, אז היא נכונה עבור $n=k+1$ לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

פרוק הביטוי $2k^2 + 7k + 6$ ע"י משוואה ריבועית:

$$2k^2 + 7k + 6 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{4} \rightarrow k = -2, -\frac{3}{2}$$

$$2(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right)$$

$$(k+2)(2k+3)$$

הסדרה מקיימת לכל n טבעי את כלל הנסיגה: $b_{n+1} = \frac{b_n}{b_n - 1}$.

כאשר נתון כי $b_{19} + b_{20} = 4.5$.

על פי כלל הנסיגה $b_{20} = \frac{b_{19}}{b_{19} - 1}$.

נסמן: $b_{19} = t$

$$t + \frac{t}{t-1} = 4.5$$

$$t(t-1) + t = 4.5(t-1)$$

$$t^2 - t + t = 4.5t - 4.5$$

$$t^2 - 4.5t + 4.5 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4.5 \pm 1.5}{2}$$

$$t = 3 \rightarrow b_{19} = 3 \rightarrow b_{20} = 1.5$$

$$t = 1.5 \rightarrow \cancel{b_{19} = 1.5} \leftarrow b_{19} > 2$$

קבלנו ש- $b_{20} = 1.5$ ומכיוון ונתון כי $b_{n+2} = b_n$, הרי שגם $b_{10} = 1.5$

(למעשה, סדרת האיברים במקומות הזוגיים, או האי זוגיים, בסדרה הנתונה – היא קבועה)

תשובה: $b_{10} = 1.5$

א. נגדיר את המאורעות:

S - הנסקרים A - צעירים

 \bar{A} - מבוגרים

B - הצהירו שיקנו טלפון חדשני

 \bar{B} - הצהירו שלא יקנו טלפון חדשנינתונים ומשמעויות

$$P(B/\bar{A}) = 0.5 \rightarrow P(\bar{B}/\bar{A}) = 0.5$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{2}{3} \rightarrow P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.2$$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$0.5 = \frac{0.1}{P(\bar{A})}$$

$$P(\bar{A}) = 0.2$$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{0.2}{P(\bar{B})}$$

$$P(\bar{B}) = 0.3$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים

	\bar{A} מבוגרים	A צעירים	
0.7	0.1	0.6	B - יקנו
0.3	0.1	0.2	\bar{B} - לא יקנו
1	0.2	0.8	

בסקר השתתפו 2,000 איש, כלומר $N(S) = 2,000$

$$N(A) = P(A) \cdot N(S)$$

$$N(A) = 0.8 \cdot 2,000 = 1,600$$

תשובה: 1,600 צעירים השתתפו בסקר.

ב. נמצא כמה צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

$$N(B/A) = P(B/A) \cdot N(A) = 0.75 \cdot 1,600 = 1,200$$

תשובה: 1,200 צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו את הטלפון החדשני.

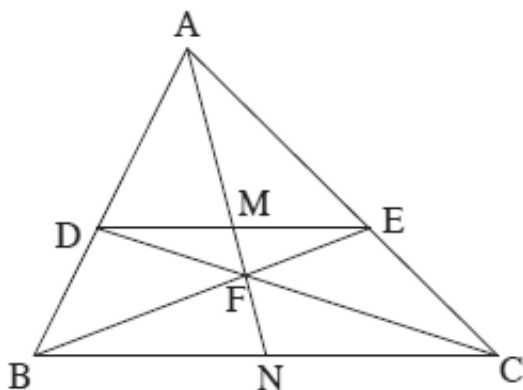
עב ינואר 12 מועד חורף שאלון 35806
נתונים

1. $DE \parallel BC$

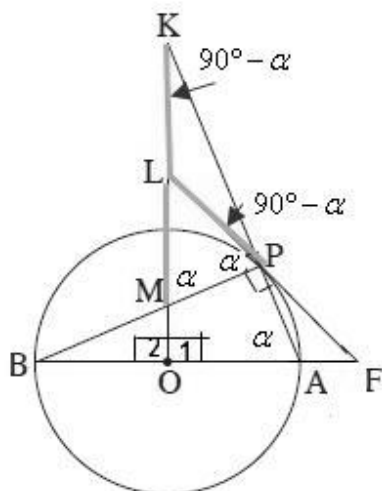
צ"ל: א. $\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$

ב. $\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$

ג. $BN = CN$, $DM = EM$



נימוק	טענה	מס'	הסבר
נתון	$DE \parallel BC$	2	1
משפט תאלס הרחבה 1	$\frac{DM}{BN} = \frac{AM}{AN}$	3	2
משפט תאלס הרחבה 1	$\frac{AM}{AN} = \frac{EM}{CN}$	4	2
כלל המעבר	$\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$	5	4, 3
מ.ש.ל. א			
משפט תאלס הרחבה 2	$\frac{EM}{BN} = \frac{MF}{FN}$	6	2
משפט תאלס הרחבה 2	$\frac{MF}{FN} = \frac{DM}{CN}$	7	2
כלל המעבר	$\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$	8	7, 6
מ.ש.ל. ב			
חישוב לפי כללי פרופורציה – יחס המונים הוא כיחס המכנים	$\frac{DM}{EM} = \frac{BN}{CN}$	9	5
חישוב לפי כללי פרופורציה – יחס המונים הוא כיחס המכנים	$\frac{DM}{EM} = \frac{CN}{BN}$	10	8
כלל מעבר	$\frac{BN}{CN} = \frac{CN}{BN}$	11	10, 9
חישוב	$BN = CN$	12	11
הצבה וחישוב	$EM = DM$	13	12, 10
מ.ש.ל. ג			

**נתונים**

1. AB קוטר במעגל שמרכזו O. $O_1 = O_2 = 90^\circ$

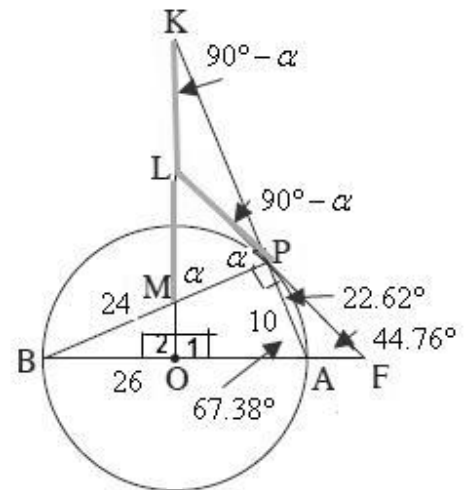
3. LF משיק למעגל בנקודה P.

עבור ב: 4. $BP = 24$ ס"מ $BP = 13$ ס"מ

צ"ל: א. $KL = LM$ ב. AF

נימוק	טענה	מס'	הסבר
נתון	$O_1 = O_2 = 90^\circ$	6	2
נתון	AB קוטר במעגל שמרכזו O	7	1
זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה	$\angle APB = 90^\circ$	8	7
נתון	LF משיק למעגל בנקודה P	9	3
זוויות צמודות משלימות ל 180°	$\angle SKP = 90^\circ$	10	8
סימון	$\angle SPAB = a$	11	
סכום זוויות $\triangle AKO$ 180°	$\angle SK = 90^\circ - a$	12	11, 6
סכום זוויות $\triangle KPM$ 180°	$\angle SKMP = a$	13	12, 10
זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית הנשענת על המיתר מצידו השני וכלל המעבר	$\angle SLPM = a$	14	11, 9
כלל המעבר	$\angle SKMP = \angle SLPM$	15	14, 13
מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות $\triangle LPM$	$LP = LM$	16	15
הפרש זוויות	$\angle SKPL = 90^\circ - a$	17	14, 10
כלל המעבר	$\angle SKPL = \angle SK$	18	17, 12
מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות $\triangle KLP$	$LP = LK$	19	18
כלל המעבר	$KL = LM$	20	19, 16
מ.ש.ל. א			

ונצפור אטריאנוואטריה אסצוף ב



24 ס"מ $BP =$ (נתון)

רדיוס המעגל 13 ס"מ (נתון) ולכן אורך הקוטר $BA = 26$ ס"מ

10 ס"מ $AP =$ (משפט פיתגורס ΔBAP)

מצאת ערך a ב- ΔBAP

$$\tan a = \frac{24}{10}$$

$$a = 67.38^\circ$$

(זווית שטוחה משלימה ל 180°) $SFPA = 90^\circ - a = 90 - 67.38 = 22.62^\circ$

$SF = 44.76^\circ$ (זווית חיצונית למשולש ΔFAP שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה)

משפט סינוסים ΔFPA

$$\frac{AF}{\sin SFPA} = \frac{AP}{\sin SF}$$

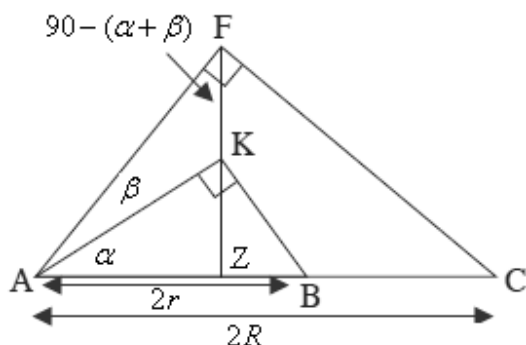
$$\frac{AF}{\sin 22.62^\circ} = \frac{10}{\sin 44.76^\circ}$$

$$\boxed{AF = 5.462}$$

תשובה: $AF = 5.462$ ס"מ

א. (1) שני המשולשים $\triangle AKB$ ו- $\triangle AFC$ ישרי זווית.

לכן $AC = 2R$ ו- $AB = 2r$ (קוטר נשען על זווית היקפית ישרה)



$$\cos \alpha = \frac{AZ}{AK} \quad : \quad \underline{\triangle AKZ}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AZ}{AF} \quad : \quad \underline{\triangle AFZ}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{AF}{AK} \quad \text{וע"י חילוק המשוואות נקבל}$$

$$\frac{AF}{AK} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \quad \text{תשובה:}$$

$$\cos \alpha = \frac{AK}{2r} \quad : \quad \underline{\triangle AKB} \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AF}{2R} \quad : \quad \underline{\triangle AFC}$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{AF}{AK} \cdot \frac{R}{r} \quad \text{וע"י חילוק המשוואות נקבל}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cos^2(\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha} \quad \text{נציב על פי (1) ונקבל:} \quad \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{R}{r}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cos^2(\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha} \quad \text{תשובה:}$$

ב. משפט סינוסים $\triangle AKF$, כאשר t רדיוס המעגל החוסם משולש זה.

$$\frac{AK}{\sin(90^\circ - (\alpha + \beta))} = 2t$$

$$\frac{2r \cos \alpha}{2 \cos(\alpha + \beta)} = t$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}} \cdot r = t$$

$$\boxed{t = \sqrt{R} \sqrt{r}} \quad \leftarrow r > 0$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את $\triangle AKF$ הוא $\sqrt{R} \sqrt{r}$ יחידות.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-2}}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ-0

$$.x \geq 0, x \neq 4 \quad \text{לכן } x \neq 4 \text{ וגם } 2x \geq 0 \text{ ובהתאם } x \geq 0$$

תשובה: תחום ההגדרה: $x \geq 0, x \neq 4$.

(2) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-2}} = \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}} \quad \leftarrow x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{\sqrt{2x-2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\sqrt{2x-2}} = -\infty \quad \rightarrow \boxed{x=2}$$

תשובה: אסימפטוטה אנכית: $x=2$ ואין אסימפטוטה אופקית.

(3) בנקודת חיתוך עם ציר y מתקיים, כי $x=0$ ונקודת החיתוך היא $(0,0)$.

זו גם נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה- x

תשובה: $(0,0)$.

(4) $(0,0)$ היא נקודת קצה, ולכן תהיה גם נקודת קיצון.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-2} - \frac{2x}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x-2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-2} - 0.5\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x-2})^2} \quad \leftarrow x > 0$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{0.5\sqrt{2x}-2}{(\sqrt{2x}-2)^2}} \quad \leftarrow x > 0$$

$$0 = 0.5\sqrt{2x} - 2$$

$$4 = \sqrt{2x}$$

$$2x = 16$$

$$x = 8 \rightarrow 4 = \sqrt{2 \cdot 8} \rightarrow 4 = 4 \rightarrow o.k.$$

$$f(8) = \frac{8}{\sqrt{2 \cdot 8} - 2} = 4 \rightarrow (8, 4)$$

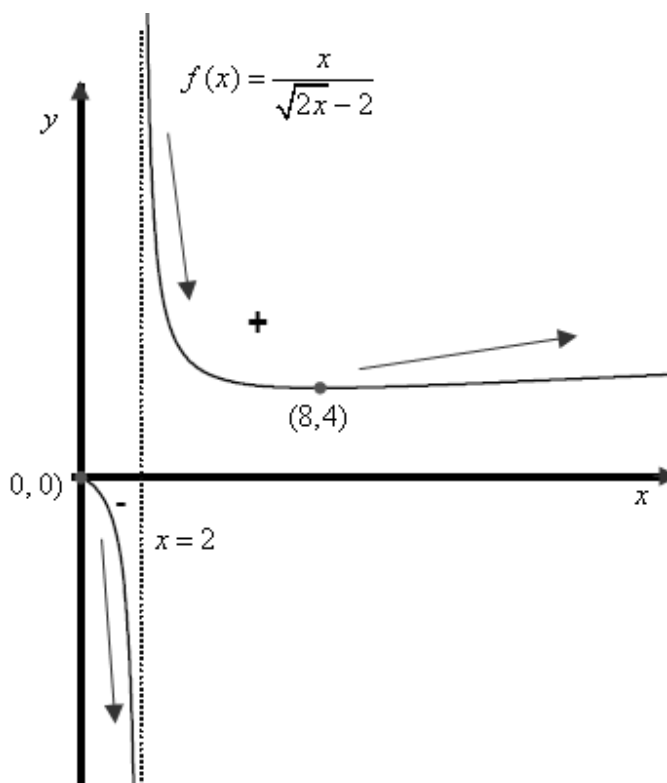
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1} - 2} = -1, \quad f(7) = \frac{7}{\sqrt{2 \cdot 7} - 2} = 4.02, \quad f(9) = \frac{9}{\sqrt{2 \cdot 9} - 2} = 4.01$$

x	0	1	4	7	8	9
$f(x)$	0	-1		4.02	4	4.01
$f'(x)$						
מסקנה	Max	↘		↘	Min	↗

תשובה: (0, 0) מקסימום, (8, 4) מינימום.

(5) הסקיצה המתאימה (כולל סימונים עבור סעיף ב):



ב. נתון כי $g'(x) = f(x) \cdot f'(x)$, כאשר $g(x)$ מוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$.

$g(x)$ יורדת כאשר $g'(x) < 0$, כלומר כאשר $f(x), f'(x)$ שוני סימן.

על פי טבלת עלייה וירידה, וגם הסקיצה של $f(x)$, זה מתקיים עבור $2 < x < 8$,

כאשר $f(x)$ חיובית, אולם יורדת (כלומר $f'(x) < 0$).

תשובה: $2 < x < 8$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}}$ בתחום $-\frac{p}{6} \leq x \leq \frac{7p}{6}$.

$16 \sin x + 9$ חיובי לכל x כי $-1 \leq \sin x \leq 1$ ולכן הפונקציה מוגדרת בכל התחום $-\frac{p}{6} \leq x \leq \frac{7p}{6}$.

מכנה הפונקציה חיובי, לכן סימן הפונקציה נקבע על ידי המונה.

$a > 0$ לכן $-a < 0$ ומכאן שכאשר $\cos x > 0$ הפונקציה שלילית, וכאשר $\cos x < 0$ הפונקציה חיובית.

(1) $f(x) > 0$ עבור $\frac{p}{2} < x < \frac{7p}{6}$.

(2) $f(x) < 0$ עבור $-\frac{p}{6} < x < \frac{p}{2}$.

ב. נחשב את האינטגרל המסוים $\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx$.

נשים לב כי $(16 \sin x + 9)' = 16 \cos x$

$$\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx =$$

$$-2a \sqrt{16 \sin x + 9} \Big|_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} =$$

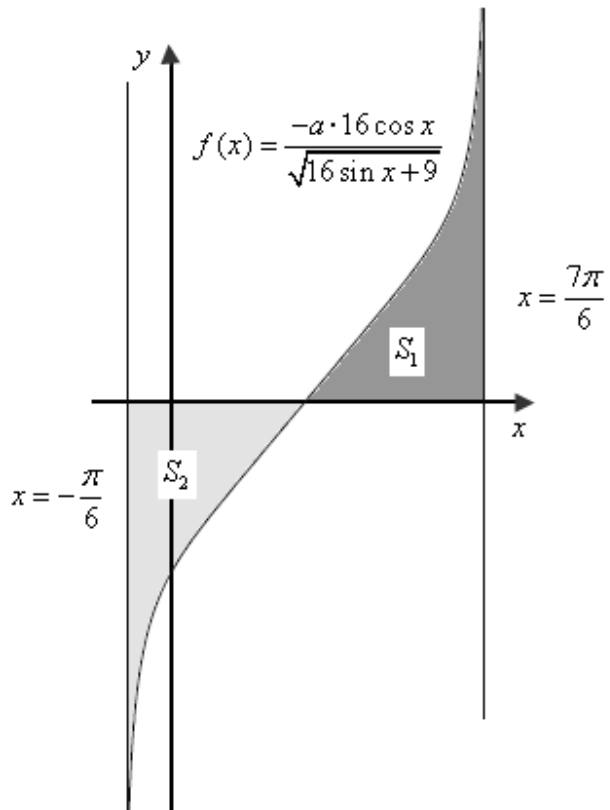
$$-2a \left(\sqrt{16 \sin \frac{7p}{6} + 9} - \sqrt{16 \sin(-\frac{p}{6}) + 9} \right) =$$

$$-2a(1-1) = 0$$

תשובה: ערך האינטגרל המסוים הוא 0.

ג. נצייר את הסקיצה המתאימה של $f(x)$, על פי תחומי החיוביות והשליליות הנתונים,

כולל סימון הישרים: $x = -\frac{p}{6}$, $x = \frac{p}{2}$.



כיוון שהראינו כי $\int_{\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx = 0$, הרי ש- $S_1 = S_2$.

גודל השטח הכולל הוא 8, לכן $S_1 = S_2 = 4$.

$$S_1 = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx =$$

$$S_1 = -2a \sqrt{16 \sin x + 9} \Bigg|_{\frac{p}{2}}^{\frac{7p}{6}}$$

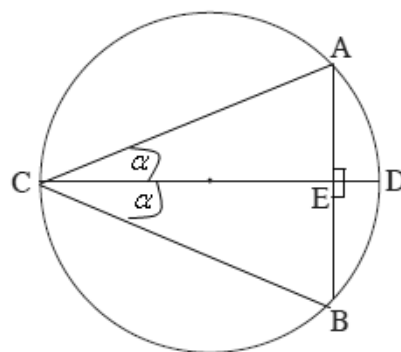
$$S_1 = -2a \left(\sqrt{16 \sin \frac{7p}{6} + 9} - \sqrt{16 \sin \left(\frac{p}{2}\right) + 9} \right)$$

$$S_1 = -2a(1-5)$$

$$S_1 = 8a$$

לכן, $8a = 4$ ו- $a = 0.5$.

תשובה: $a = 0.5$



הפונקציה שיש להביא למקסימום היא ΔABC הנקראת ABC .

CD הוא קוטר, שאורכו נתון $2R$, המאונך למיתר AB, ולכן חוצה את הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
(אם ישר עובר דרך מרכז המעגל ומאונך למיתר אז הוא חוצה את הקשת שהמיתר נשען עליה)
נסמן את ΔACD ב- a ולכן $SBCD = a$ (על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות).

ב: ΔACD נקבל: $AC = 2R \cos a$

$$\boxed{S(a) = 2R^2 \cos^2 a \sin 2a} \leftarrow S(a) = \frac{(2R \cos a)^2 \sin 2a}{2} \text{ ולכן}$$

$$S'(a) = 2R^2 (2 \cos a (-\sin a) \sin 2a + 2 \cos^2 a \cos 2a)$$

$$S'(a) = 2R^2 (2 \cos a [-\sin a \sin 2a + \cos a \cos 2a])$$

$$\boxed{S'(a) = 4R^2 \cos a \cos 3a}$$

$$\cancel{0 = \cos a} \leftarrow 0 < a < 90^\circ$$

$$0 = \cos 3a$$

$$3a = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$a = 30^\circ + 60^\circ k$$

$$a = 30^\circ \leftarrow 0 < a < 90^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} S'(\frac{p}{7}) &= 4R^2 \cos \frac{p}{7} \cos 3 \cdot \frac{p}{7} = 0.8R^2 > 0 \\ S'(\frac{p}{5}) &= 4R^2 \cos \frac{p}{5} \cos 3 \cdot \frac{p}{5} = -R^2 < 0 \end{aligned} \right\} \text{max}$$

קבלנו ש ΔABC הוא בעל שטח מקסימלי כאשר הוא שווה צלעות.

$$S = 2R^2 \cos^2 30^\circ \sin 60^\circ$$

$$S = 2R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2}$$

תשובה: השטח המקסימלי של ΔABC הוא $\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$ יח"ר.