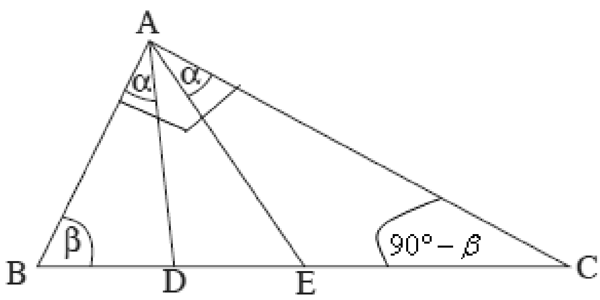
א. (1) ΔABC **ישר זווית** $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ **.**

$\sphericalangle DAC = 90^\circ - \alpha$ **(הפרש זוויות)**

$\sphericalangle ACB = 180^\circ - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \beta$ **(סכום זוויות משולש** ΔABC 180°**)**



$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{BD}{\sin \sphericalangle BAD} = \frac{AD}{\sin \sphericalangle ABD}$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$$

$$\boxed{BD = \frac{AD \sin \alpha}{\sin \beta}}$$

$\underline{\Delta ADC}$

$$\frac{DC}{\sin \sphericalangle DAC} = \frac{AD}{\sin \sphericalangle ACB}$$

$$\frac{DC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AD}{\sin(90^\circ - \beta)}$$

$$\boxed{DC = \frac{AD \cos \alpha}{\cos \beta}}$$

תשובה: $BD = \dfrac{AD \sin \alpha}{\sin \beta}$ **,** $DC = \dfrac{AD \cos \alpha}{\cos \beta}$

(2) נמצא את היחס $BD : DC$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\dfrac{AD \sin \alpha}{\sin \beta}}{\dfrac{AD \cos \alpha}{\cos \beta}} = \frac{AD \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{AD \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

תשובה: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{\tan \alpha}{\tan \beta}$

(3) (הפרש זוויות)

$\underline{\Delta ABE}$

$$\frac{BE}{\sin \sphericalangle BAE} = \frac{AE}{\sin \sphericalangle ABE}$$

$$\frac{BE}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AE}{\sin \beta}$$

$$\boxed{BE = \frac{AE \cos \alpha}{\sin \beta}}$$

$\underline{\Delta AEC}$

$$\frac{CE}{\sin \sphericalangle EAC} = \frac{AE}{\sin \sphericalangle ACB}$$

$$\frac{CE}{\sin \alpha} = \frac{AE}{\sin(90^\circ - \beta)}$$

$$\boxed{CE = \frac{AE \sin \alpha}{\cos \beta}}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{\dfrac{AE \cos \alpha}{\sin \beta}}{\dfrac{AE \sin \alpha}{\cos \beta}} = \frac{AE \cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{AE \sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha \, \tan \beta}$$

תשובה: $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{1}{\tan \alpha \, \tan \beta}$

ב. נתון: $\frac{BE}{CE} = 3 \cdot \frac{BD}{DC}$.

(1) נציב בנתון ע"פ סעיף א (2) ו- (3).

$$\frac{1}{\tan a \ \tan b} = 3 \cdot \frac{\tan a}{\tan b} \quad / \cdot \frac{\tan a \ \tan b}{3}$$

$$\boxed{\tan^2 a = \frac{1}{3}}$$

תשובה: הוּכַח.

(2) נפתור את המשוואה: $\tan^2 a = \frac{1}{3}$

$$\tan a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a = 30° \quad \leftarrow 2a < 90°$$

$$\mathbf{S}DAE = 90° - 2a = 90° - 2 \cdot 30° = 30°$$

תשובה: $\mathbf{S}DAE = 30°$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\cos x+a\sin 2x+1$ **, בתחום** $-p\le x\le p$ **(** a **הוא פרמטר).**

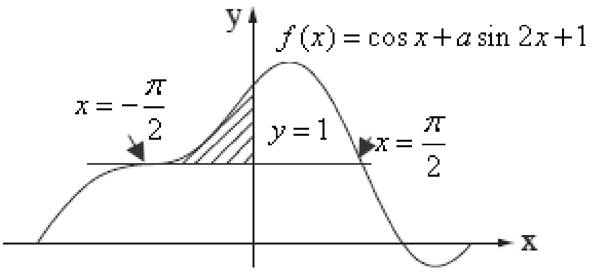
נציב $x=\frac{p}{2},\ x=-\frac{p}{2}$ **למציאת שתי נקודות על הישר המבוקש.**

$$f(\frac{p}{2})=\cos(\frac{p}{2})+a\sin(2\cdot\frac{p}{2})+1=1$$
$$f(-\frac{p}{2})=\cos(-\frac{p}{2})+a\sin(2\cdot(-\frac{p}{2}))+1=1$$

וקבלנו ששיעורי ה- y **שווים ולכן הישר הוא הפונקציה הקבועה** $y=1$ **.**

תשובה: משוואת הישר היא $y=1$ **.**

ב. נחשב את השטח, שגודלו שווה ל- 0.5



$$S=\int_{-\frac{p}{2}}^{0}(\cos x+a\sin 2x+1-1)dx$$
$$S=\sin x-0.5a\cos 2x\ \Big]_{-\frac{p}{2}}^{0}$$
$$S=(\sin 0-0.5a\cos(2\cdot 0))-(\sin(-\frac{p}{2})-0.5a\cos(2\cdot(-\frac{p}{2})))$$
$$S=(-0.5a)-(-1+0.5a)$$
$$\boxed{S=-a+1}$$

ולכן $-a+1=0.5$ **ונקבל** $\boxed{a=0.5}$

תשובה: $a=0.5$ **.**

ג. נציב $a=0.5$ **ונקבל** $f(x)=\cos x+0.5\sin 2x+1$ **. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון הפנימיות.**

$$\boxed{f'(x)=-\sin x+\cos 2x}$$
$$0=-\sin x+\cos 2x$$
$$\sin x=\cos 2x\quad\rightarrow\cos(90^\circ-x)=\cos 2x$$
$$90^\circ-x=2x+2pk\qquad 90^\circ-x=-2x+2pk$$
$$3x=90^\circ+2pk\qquad x=-90^\circ+2pk$$
$$x=30^\circ+\frac{2}{3}pk$$

k	$x=30^\circ+\frac{2}{3}pk$	$x=-90^\circ+2pk$
0	$x=30^\circ=\frac{p}{6}$	$x=-90^\circ=-\frac{p}{2}$
1	$x=150^\circ=\frac{5p}{6}$	

נציב את שיעורי ה- x **שקבלנו, ואת שיעורי נקודות הקצה, בתבנית הפונקציה:**

$$f(-\frac{p}{2})=1,\quad f(\frac{p}{6})=\cos(\frac{p}{6})+0.5\sin(2\cdot\frac{p}{6})+1=2\quad,f(\frac{5p}{6})=\cos(\frac{5p}{6})+0.5\sin(2\cdot(\frac{5p}{6}))+1=-0.923$$
$$f(-p)=\cos(-p)+0.5\sin(2\cdot(-p))+1=0\quad,f(p)=\cos(p)+0.5\sin(2\cdot p)+1=0$$
.

על פי השתנות ערכי ה- y **,** **<u>וניתן היה להסתפק בציור הנתון</u>, ניתן לענות לסעיף.**

תשובה: $x=\frac{p}{6}$ **מקסימום,** $x=\frac{5p}{6}$ **מינימום.**

ד. הישר $y=1$ אכן משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\frac{p}{2}$, שכן שיפועו 0 שווה לערך הנגזרת בנקודה זו.

תשובה: כן.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-2}{(2x-2)^2}$.

הביטוי שבמכנה $2x-2$ **מתאפס עבור** $x=1$ **ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** $x\neq 1$ **.**

תשובה: $x\neq 1$ **.**

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ולכן:**

$$0=\frac{x-2}{(2x-2)^2}$$

$$0=x-2 \quad \rightarrow x=2 \quad \rightarrow \boxed{(2,0)}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן:**

$$f(0)=\frac{0-2}{(2\cdot 0-2)^2}=-0.5 \quad \rightarrow \boxed{(0,-0.5)}$$

תשובה: $(2,0)$ **,** $(0,-0.5)$ **.**

ג. אסימפטוטה אופקית - חזקת פולינום המונה (1) **קטנה מחזקת פולינום המכנה** (2)

ולכן הביטוי $\frac{x-2}{(2x-2)^2}$ **שואף ל-** 0 **כאשר** $x\rightarrow\pm\infty$ **והישר** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית .**

אסימפטוטה אנכית - $x=1$ **מאפס מכנה ולא מונה,**

ולכן הביטוי $\frac{x-2}{(2x-2)^2}$ **שואף ל-** $-\infty$ **כאשר** $x\rightarrow 1$ **ובהתאם** $x=1$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=0$ **,** $x=1$ **.**

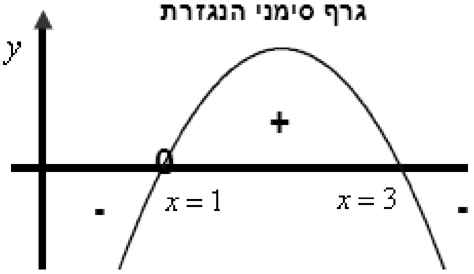
ד. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה ואת סוגה.

$$f'(x)=\frac{(2x-2)^2-2(2x-2)\cdot 2\cdot(x-2)}{(2x-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(2x-2-4(x-2))}{(2x-2)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(2x-2)(6-2x)}{(2x-2)^4}}$$

גרף סימני הנגזרת

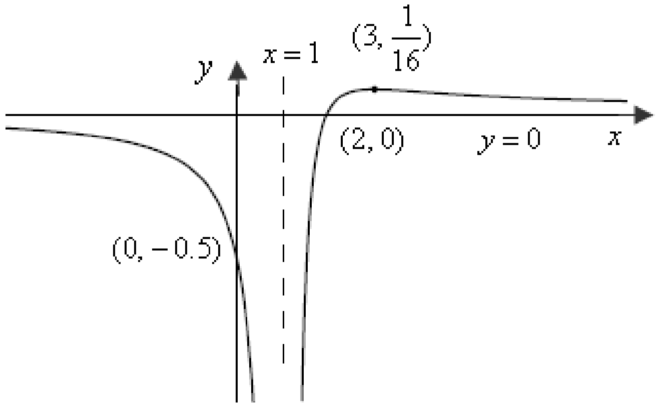


הנגזרת מתאפסת עבור $x=1$ **(לא בתחום ההגדרה),ו-** $x=3$ **, כאשר מכנה הנגזרת חיובי ועל פי גרף סימני הנגזרת משמאל. עבור** $x=3$ **נגזרת הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות, והפונקציה עוברת מעלייה לירידה וזו נקודת מקסימום.**

$$f(3)=\frac{3-2}{(2\cdot 3-2)^2}=\frac{1}{16} \quad \rightarrow \boxed{(3,\frac{1}{16})}$$

תשובה: $(3,\frac{1}{16})$ **מקסימום .**

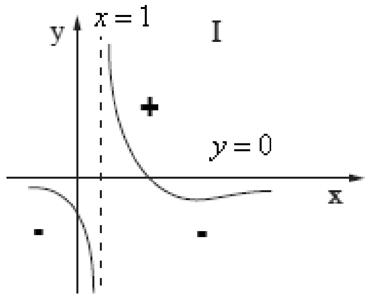
ה. הסקיצה המתאימה



ו. גרף I **מתאים לגרף הנגזרת, בהתאם לתחומי החיוביות שלילות, שפורטו בסעיף ד',**

וכן לאסימפטוטה האנכית $x=1$ **שיש גם לגרף הנגזרת,**

והאסימפטוטה האופקית $y=0$ **(חזקת המונה** (2) **קטנה מחזקת המכנה** (4)**).**



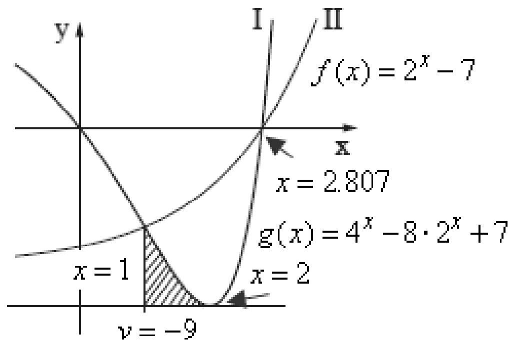
תשובה: גרף I**.**

א. נתונות הפונקציות $f(x)=2^x-7$ **ו-** $g(x)=4^x-8\cdot 2^x+7$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, ובהתאם:** $f(0)=2^0-7=-6$ **,** $g(0)=4^0-8\cdot 2^0+7=0$

תשובה: גרף I **:** $g(x)$ **, גרף** II **:** $f(x)$

ב. נמצא את שיעור ה- x **של נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.**



$$4^x-8\cdot 2^x+7=2^x-7 \quad \boxed{2^x=t}$$
$$t^2-8+7=t-7$$
$$t^2-9t+14=0$$
$$(t-2)(t-7)=0$$
$$t=2 \quad \to 2^x=2 \quad \to x=1$$
$$t=7 \quad \to 2^x=7 \quad \to x=\frac{\ln 7}{\ln 2}=2.807$$

תשובה: $x=1$ **,** $x=2.807$

ג. משוואת הישר, המקביל לציר ה- y **היא** $x=1$ **.**

נמצא את שיעור ה- y **עבור** $x=2$ **:** $g(2)=4^2-8\cdot 2^2+7=-9$ **ולכן משוואת הפונקציה הקבועה,**

העוברת בנקודת המינימום של גרף I **,** $g(x)=4^x-8\cdot 2^x+7$ **, היא** $y=-9$ **.**

נחשב את השטח המבוקש:

$$S=\int_1^2(4^x-8\cdot 2^x+7-(-9))dx$$
$$S=\int_1^2(4^x-8\cdot 2^x+16)dx$$
$$S=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{8\cdot 2^x}{\ln 2}+16x\Big]_1^2$$
$$S=(\frac{4^2}{2\ln 2}-\frac{8\cdot 2^2}{\ln 2}+16\cdot 2)-(\frac{4^1}{2\ln 2}-\frac{8\cdot 2^1}{\ln 2}+16\cdot 1) \quad \leftarrow \ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$$
$$S=\frac{8}{\ln 2}-\frac{32}{\ln 2}+32-\frac{2}{\ln 2}+\frac{16}{\ln 2}-16$$
$$\boxed{S=16-\frac{10}{\ln 2}=1.573}$$

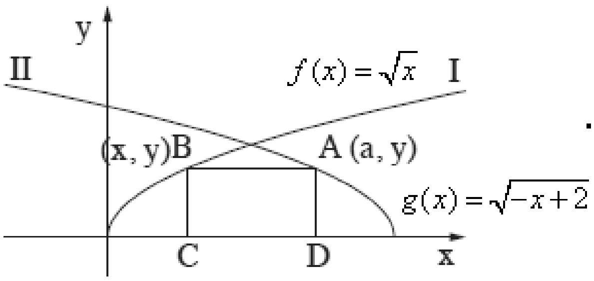
תשובה: גודל השטח $16-\frac{10}{\ln 2}=1.573$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציות $f(x)=\sqrt{x}$ **, המוגדרת בתחום** $x \geq 0$ **ובהתאם מתאימה לגרף** I **.**

נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{-x+2}$ **, המוגדרת כאשר** $-x+2 \geq 0$ **, כלומר כאשר** $x \leq 2$ **ולכן מתאימה לגרף** II **.**

תשובה: תחום ההגדרה המשותף הוא $0 \leq x \leq 2$ **.**

ב. (1) הנקודה $\mathrm{B}(x,y)$ **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=\sqrt{x}$ **, לכן** $y=\sqrt{x}$ **.**



$y_{\mathrm{A}}=y_{\mathrm{B}}=\sqrt{x}$ **כי** AB **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $\mathrm{A}(a,\sqrt{x})$ **.**

ובהתאם נציב שיעוריה בתבנית הפונקציה $g(x)=\sqrt{-x+2}$ **.**

$$\sqrt{x}=\sqrt{-a+2} \rightarrow x=-a+2 \rightarrow \boxed{a=2-x}$$

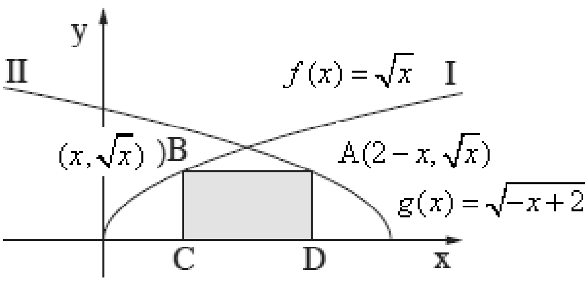
תשובה: הוּכַח.

(2) הפונקציה שיש להביא למקסימום היא שטח המלבן ABCD

$$\mathrm{AB}=x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=2-x-x=2-2x$$

$$\mathrm{AD}=y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{D}}=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$$

$$\boxed{\mathrm{S}=(2-2x)\sqrt{x}}$$



$$\mathrm{S}'=-2\sqrt{x}+\frac{2-2x}{2\sqrt{x}} \rightarrow \mathrm{S}'=-2\sqrt{x}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

$$\mathrm{S}'=\frac{-2x+1-x}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\mathrm{S}'=\frac{1-3x}{\sqrt{x}}}$$

$$0=1-3x \rightarrow 3x=1$$

$$x_{\mathrm{B}}=\frac{1}{3}$$

מכנה הנגזרת הראשונה חיובי, ולכן סימניה יקבעו על פי המונה.

$$\mathrm{S}'(0.3)=1-3\cdot 0.3>0 \quad \mathbf{Z} \quad \mathrm{S}'(0.4)=1-3\cdot 0.4<0 \quad]$$

עבור $x_{\mathrm{B}}=\frac{1}{3}$ **פונקציית השטח עוברת מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $x_{\mathrm{B}}=\frac{1}{3}$ **, עבורו שטח המלבן** ABCD **מקסימלי.**

(3) נציב $x=\frac{1}{3}$ **בפונקציית השטח :** $\mathrm{S}=(2-2\cdot\frac{1}{3})\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}=0.7698$.

תשובה: שטח המלבן המקסימלי הוא $\frac{4}{9}\sqrt{3}=0.7698$ **יח"ר.**