

נסמן ב-  $x$  את מהירות המשאית שיצאה מעיר A (קמ"ש, קבועה)  
 נסמן ב-  $y$  את מהירות המכונית שיצאה מעיר B (קמ"ש, קבועה)  
 נסמן ב-  $s$  את המרחק מעיר A לעיר B (ק"מ).

דרג-מרחק - $s$ ק"מ	מהירות - $v$ קמ"ש	זמן - $t$ שעות		
$2x$	$x$	2	משאית	עד מפגש ראשון
$2y$	$y$	2	מונית	
$2\frac{2}{3}x$	$x$	$2\frac{2}{3}$	משאית	מפגש ראשון עד מפגש שני
$2\frac{2}{3}y$	$y$	$2\frac{2}{3}$	מונית	
$s-40$ עד 40 ק"מ מעיר B	$x$	$\frac{s-40}{x}$	משאית	מיציאה עד מפגש שלישי
$2s+40$ הלוך ושוב, ועוד 40 ק"מ	$y$	$\frac{2s+40}{y}$	מונית	

עד המפגש הראשון עברו שני כלי הרכב את כל הדרך:  $2x+2y=s$ .

מהמפגש הראשון עד המפגש השני עברה המכונית

(עד עיר A) את המרחק שעברה המשאית מתחילת התנועה עד המפגש הראשון,

וגם את המרחק (מעיר A) שעברה המשאית מהתחלה עד המפגש שני:  $2\frac{2}{3}y = 2x + 2\frac{2}{3}x$ .

הזמנים שעברו שני כלי הרכב מיציאה עד למפגש שלישי, 40 ק"מ מעיר B, שווים  $\frac{s-40}{x} = \frac{2s+40}{y}$

$$\begin{cases} (1) & 2x+2y=s \\ (2) & 2\frac{2}{3}y=2x+2\frac{2}{3}x \rightarrow y=2.5x \\ (3) & \frac{s-40}{x}=\frac{2s+40}{y} \end{cases}$$

$$(2), (3) \quad \frac{s-40}{x} = \frac{2s+40}{2.5x} \quad / \cdot 2.5x$$

$$2.5s - 100 = 2s + 40$$

$$0.5s = 140$$

$$\boxed{s = 280}$$

$$(1), (2) \quad 2x + 2 \cdot 2.5x = 280$$

$$7x = 280$$

$$\boxed{x = 40} \quad \boxed{y = 100}$$

תשובה: מהירות המשאית 40 קמ"ש.

1. נבדוק עבור  $n=1$  :

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ :אגף שמאל} \geq \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \text{ :אגף ימין}$$

לכן, הטענה נכונה עבור  $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור  $n=k$  טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה), כלומר:  $a_k \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור  $n=k+1$ , לכן צ"ל

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} &\geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \\ &\quad \downarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} &\geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \end{aligned}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הקטן ממנו (הביטויים המודגשים עם קו מתחת),

לכן, די אם נוכיח את אי השוויון החדש.

כיוון שכל אחד מהביטויים שבאגף שמאל ובאגף ימין חיוביים (עבור  $k$  טבעי)

ניתן להעלות בריבוע את שני האגפים.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{4k} \cdot \frac{(2k+1)^2}{4(k+1)^2} &\geq \frac{1}{4(k+1)} \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4(k+1)}} \cdot \frac{(2k+1)^2}{4(k+1)} &\geq \boxed{\frac{1}{4(k+1)}} \\ \Leftrightarrow \frac{4k^2 + 4k + 1}{4(k+1)} &\geq 1 \end{aligned}$$

כיוון ששני הביטויים במסגרת שווים, די אם נוכיח את אי השוויון החדש

$$\Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 \geq 4k + 4$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 \geq 3$$

כאשר עבור כל  $k$  טבעי אי שוויון זה נכון.

מתקבל שאגף שמאל גדול או שווה מאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור  $n=1$ , הראינו שאם הטענה נכונה עבור  $n=k$  טבעי כלשהו אז היא נכונה עבור  $n=k+1$  לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל  $n$  טבעי.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq \frac{n}{2\sqrt{n}} \quad \text{ב. צ"ל כי}$$

על פי סעיף א אי השוויון השמאלי נכון בכל אחת מהשורות הבאות, כאשר במעבר לביטוי הימני המכנה גדל והביטוי קטן (למעט בשורה האחרונה). (כיוון שלא ידוע ערכו של  $n$ , השאר רשום בכל אחת מהשורות הראשונות  $\geq$ ).

$$a_1 \geq \frac{1}{2\sqrt{1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$a_2 \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$a_3 \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

...

$$a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq \frac{n}{2\sqrt{n}} \quad \text{ולכן}$$

תשובה: הוכח.

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-2}}$ .

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ-0

$$.x \geq 0, x \neq 4 \quad \text{לכן } x \neq 4 \text{ וגם } 2x \geq 0 \text{ ובהתאם } x \geq 0$$

תשובה: תחום ההגדרה:  $x \geq 0, x \neq 4$ .

(2) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-2}} = \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}} \quad \leftarrow x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{\sqrt{2x-2}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\sqrt{2x-2}} = -\infty \quad \rightarrow \boxed{x=2}$$

תשובה: אסימפטוטה אנכית:  $x=2$  ואין אסימפטוטה אופקית.

(3) בנקודת חיתוך עם ציר  $y$  מתקיים, כי  $x=0$  ונקודת החיתוך היא  $(0,0)$ .

זו גם נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה- $x$ .

תשובה:  $(0,0)$ .

(4)  $(0,0)$  היא נקודת קצה, ולכן תהיה גם נקודת קיצון.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-2} - \frac{2x}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x-2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-2} - 0.5\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x-2})^2} \quad \leftarrow x > 0$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{0.5\sqrt{2x-2}}{(\sqrt{2x-2})^2}} \quad \leftarrow x > 0$$

$$0 = 0.5\sqrt{2x-2}$$

$$4 = \sqrt{2x}$$

$$2x = 16$$

$$x = 8 \rightarrow 4 = \sqrt{2 \cdot 8} \rightarrow 4 = 4 \rightarrow o.k.$$

$$f(8) = \frac{8}{\sqrt{2 \cdot 8} - 2} = 4 \rightarrow (8,4)$$

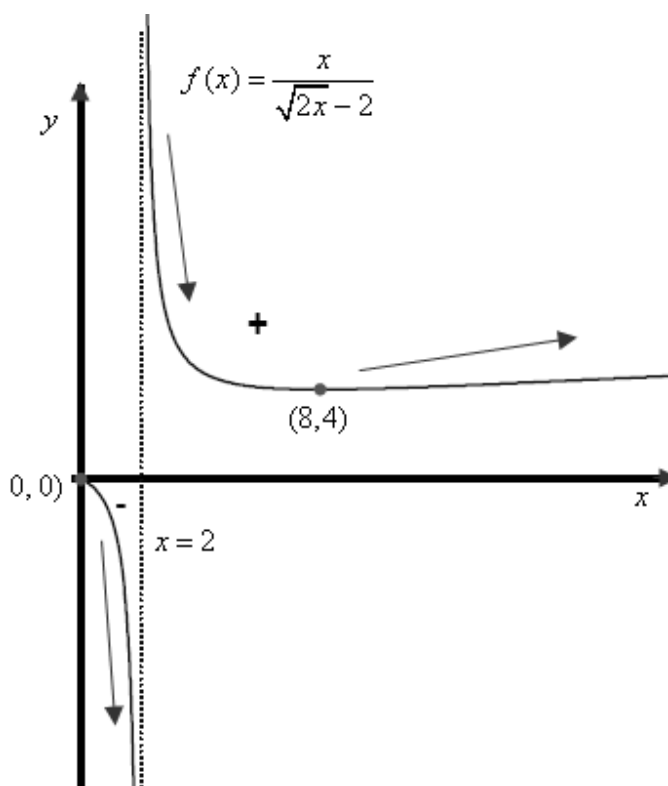
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1} - 2} = -1, \quad f(7) = \frac{7}{\sqrt{2 \cdot 7} - 2} = 4.02, \quad f(9) = \frac{9}{\sqrt{2 \cdot 9} - 2} = 4.01$$

$x$	0	1	4	7	8	9
$f(x)$	0	-1		4.02	4	4.01
$f'(x)$						
מסקנה	Max	↘		↘	Min	↗

תשובה: (0, 0) מקסימום, (8, 4) מינימום.

(5) הסקיצה המתאימה (כולל סימונים עבור סעיף ב):



ב. נתון כי  $g'(x) = f(x) \cdot f'(x)$ , כאשר  $g(x)$  מוגדרת בתחום ההגדרה של  $f(x)$ .

$g(x)$  עולה כאשר  $g'(x) > 0$ , כלומר כאשר  $f(x), f'(x)$  שווים סימן.

על פי טבלת עלייה וירידה, וגם הסקיצה של  $f(x)$  -

זה מתקיים עבור  $x > 8$  כאשר  $f(x)$  חיובית, ועולה (כלומר  $f'(x) > 0$ )

ועבור  $0 < x < 2$  כאשר  $f(x)$  שלילית ויורדת (כלומר  $f'(x) < 0$ ).

$g(x)$  יורדת כאשר  $g'(x) < 0$ , כלומר כאשר  $f(x), f'(x)$  שונים סימן.

ובהתאם עבור  $2 < x < 8$ , כאשר  $f(x)$  חיובית, אולם יורדת (כלומר  $f'(x) < 0$ ).

תשובה: עליה:  $x > 8$  או  $0 < x < 2$ , ירידה:  $2 < x < 8$ .

א. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}}$  בתחום  $-\frac{p}{6} \leq x \leq \frac{7p}{6}$ .

$16 \sin x + 9$  חיובי לכל  $x$  כי  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ולכן הפונקציה מוגדרת בכל התחום  $-\frac{p}{6} \leq x \leq \frac{7p}{6}$ .

מכנה הפונקציה חיובי, לכן סימן הפונקציה נקבע על ידי המונה.

$a > 0$  לכן  $-a < 0$  ומכאן שכאשר  $\cos x > 0$  הפונקציה שלילית, וכאשר  $\cos x < 0$  הפונקציה חיובית.

(1)  $f(x) > 0$  עבור  $\frac{p}{2} < x < \frac{7p}{6}$ .

(2)  $f(x) < 0$  עבור  $-\frac{p}{6} < x < \frac{p}{2}$ .

ב. נחשב את האינטגרל המסוים  $\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx$ .

נשים לב כי  $(16 \sin x + 9)' = 16 \cos x$

$$\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx =$$

$$-2a \sqrt{16 \sin x + 9} \Bigg|_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} =$$

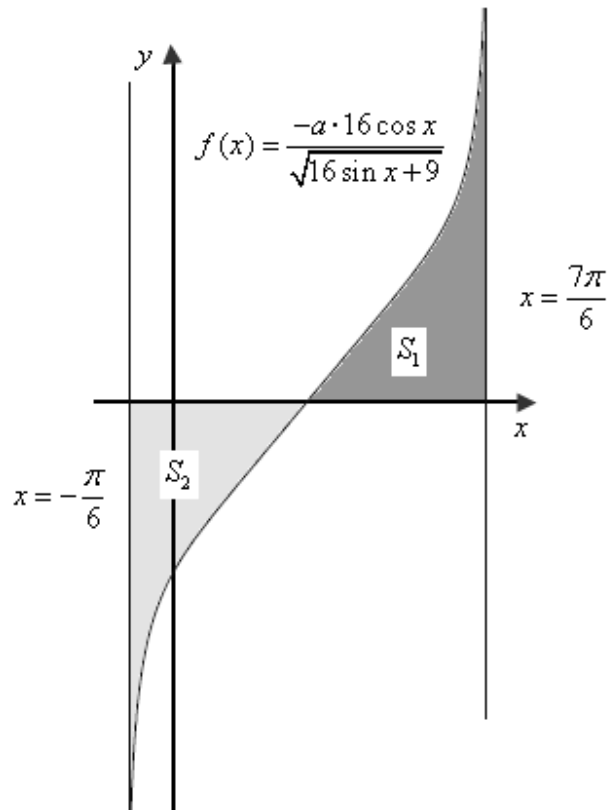
$$-2a \left( \sqrt{16 \sin \frac{7p}{6} + 9} - \sqrt{16 \sin \left(-\frac{p}{6}\right) + 9} \right) =$$

$$-2a(1-1) = 0$$

תשובה: ערך האינטגרל המסוים הוא 0.

ג. נצייר את הסקיצה המתאימה של  $f(x)$ , על פי תחומי החיוביות והשליליות הנתונים,

כולל סימון הישרים:  $x = -\frac{p}{6}$ ,  $x = \frac{p}{2}$ .



כיוון שהראינו כי  $\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx = 0$ , הרי ש-  $S_1 = S_2$ .

גודל השטח הכולל הוא 8, לכן  $S_1 = S_2 = 4$ .

$$S_1 = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx =$$

$$S_1 = -2a \sqrt{16 \sin x + 9} \left. \begin{array}{l} \frac{7p}{6} \\ \frac{p}{2} \end{array} \right]$$

$$S_1 = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{7p}{6}} \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}} dx =$$

$$S_1 = -2a \sqrt{16 \sin x + 9} \left. \begin{array}{l} \frac{7p}{6} \\ \frac{p}{2} \end{array} \right]$$

$$S_1 = -2a \left( \sqrt{16 \sin \frac{7p}{6} + 9} - \sqrt{16 \sin \left(\frac{p}{2}\right) + 9} \right)$$

$$S_1 = -2a(1-5)$$

$$S_1 = 8a$$

$$S_1 = -2a(1-5)$$

$$S_1 = 8a$$

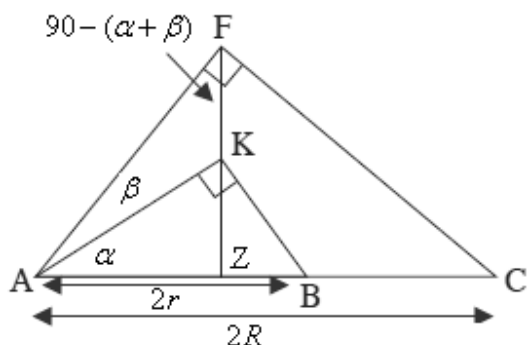
לכן,  $8a = 4$  ו-  $a = 0.5$ .

תשובה:  $a = 0.5$



א. (1) שני המשולשים  $\triangle AFC$  ו- $\triangle AKB$  ישרי זווית.

לכן  $AC = 2R$  ו-  $AB = 2r$  (קוטר נשען על זווית היקפית ישרה)



$$\cos \alpha = \frac{AZ}{AK} \quad : \quad \underline{\triangle AKZ}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AZ}{AF} \quad : \quad \underline{\triangle AFZ}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{AF}{AK} \quad \text{וע"י חילוק המשוואות נקבל}$$

$$\frac{AF}{AK} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \quad \text{תשובה:}$$

$$\cos \alpha = \frac{AK}{2r} \quad : \quad \underline{\triangle AKB} \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AF}{2R} \quad : \quad \underline{\triangle AFC}$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{AF}{AK} \cdot \frac{R}{r} \quad \text{וע"י חילוק המשוואות נקבל}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cos^2(\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha} \quad \text{נציב על פי (1) ונקבל:} \quad \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{R}{r}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cos^2(\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha} \quad \text{תשובה:}$$

ב. משפט סינוסים  $\triangle AKF$ , כאשר  $t$  רדיוס המעגל החוסם משולש זה.

$$\frac{AK}{\sin(90^\circ - (\alpha + \beta))} = 2t$$

$$\frac{2r \cos \alpha}{2 \cos(\alpha + \beta)} = t$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}} \cdot r = t$$

$$\boxed{t = \sqrt{R} \sqrt{r}} \quad \leftarrow r > 0$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את  $\triangle AKF$  הוא  $\sqrt{R} \sqrt{r}$  יחידות.