א. נתונה הפרבולה $y^2 = 2x$ **ובהתאם הפרמטר של הפרבולה** $p=1$ **.**

משוואת משיק לפרבולה, בנקודה שעליה $y^2 = 2px$ **:** $yy_0 = p(x+x_0)$

משוואת המשיק בנקודה $A(x_A, y_A)$ **היא** $yy_A = 1\cdot(x+x_A) \quad \to yy_A = x + x_A$

משוואת המשיק בנקודה $B(x_B, y_B)$ **היא** $yy_B = 1\cdot(x+x_B) \quad \to yy_B = x + x_B$

הנקודה E **מקיימת את שתי המשוואות, ואם נחסיר את השנייה מהראשונה,**

נקבל $yy_A - yy_B = x_A - x_B$

ומכאן ש $y_E(y_A - y_B) = x_A - x_B$

תשובה: הוכַח.

ב. נתון כי $CE = EB$ **ומכאן ש-** $\frac{y_B + y_C}{2} = y_E$ **(לפי נוסחת אמצע קטע), ולכן** $y_C = 2y_E - y_B$ **.**

נשים לב כי הנקודות מקיימות את משוואת הפרבולה $y^2 = 2x$ **,**

ולכן ${y_A}^2 = 2x_A, \quad {y_B}^2 = 2x_B$

$$y_C = 2\cdot\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} - y_B$$

$$y_C = \frac{2x_A - 2x_B - y_A y_B + (y_B)^2}{y_A - y_B}$$

$$y_C = \frac{(y_A)^2 - \cancel{(y_B)^2} - y_A y_B + \cancel{(y_B)^2}}{y_A - y_B}$$

$$y_C = \frac{y_A(y_A - y_B)}{y_A - y_B}$$

$$y_C = y_A$$

ומכאן ש- CA **מקביל לציר ה-** x

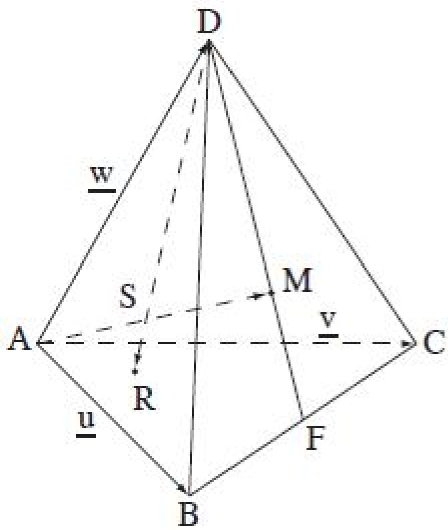
תשובה: הוכַח.

א.

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

$\overrightarrow{AC} = \underline{v}$

$\overrightarrow{AD} = \underline{w}$



הנקודה P **היא אמצע המקצוע** AD **ולכן** $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\underline{w}$

$\overrightarrow{DQ} = t(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{DQ} = t\overrightarrow{DB} + t\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DQ} = -t\underline{w} + t\underline{u} - t\underline{w} + t\underline{v}$

$\overrightarrow{DQ} = t\underline{u} + t\underline{v} - 2t\underline{w}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}$

$\overrightarrow{PQ} = t\underline{u} + t\underline{v} + (\frac{1}{2} - 2t)\underline{w}$

$\overrightarrow{PQ}$ **מקביל למישור** ABC **אם הוא קומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את המישור,**

כלומר $\underline{u}$ **ו-** $\underline{v}$**. ומכאן** $\frac{1}{2} - 2t = 0$ **ולכן** $t = 0.25$**.**

תשובה: $t = 0.25$**.**

ב. (1) DF **תיכון בפאה** BCD **ולכן** $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

M **נקודת מפגש תיכונים בפאה** BCD**,**

החותכים זה את זה ביחס 2:1 **מהקדקוד ולכן** $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$

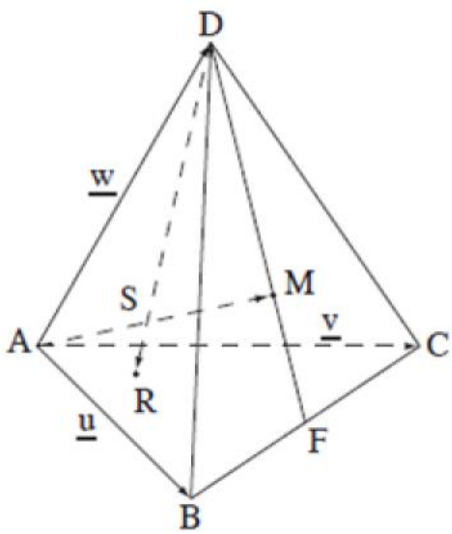
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{AM} = \underline{w} + \frac{1}{3}(-\underline{w} + \underline{u} - \underline{w} + \underline{v})$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$

תשובה: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$



(2) נתון כי $\boxed{\overrightarrow{DR}=\frac{1}{6}\underline{u}+\frac{1}{6}\underline{v}-\underline{w}}$

נסמן: $\overrightarrow{DS}=\quad\overrightarrow{DR},\ \overrightarrow{AS}=\sim\ \overrightarrow{AM}$.

$$\boxed{\overrightarrow{DS}=\frac{1}{6}\quad\underline{u}+\frac{1}{6}\quad\underline{v}-\quad\underline{w}}$$

נמצא הצגה נוספת לווקטור $\overrightarrow{DS}$.

$$\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{DA}+\sim\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{DS}=-\underline{w}+\sim(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{DS}=\frac{1}{3}\sim\underline{u}+\frac{1}{3}\sim\underline{v}+(\frac{1}{3}\sim-1)\underline{w}}$$

על פי ייחודיות ההצגה של הווקטור $\overrightarrow{DS}$ **, נקבל מערכת של שלוש משוואות עם שני נעלמים:**

$$\begin{cases}\frac{1}{6}\beta=\frac{1}{3}\sim & \rightarrow\beta=2\sim\\ \frac{1}{6}\beta=\frac{1}{3}\sim & \rightarrow\beta=2\sim\\ -\beta=\frac{1}{3}\sim-1\end{cases}$$

$$-2\sim\ =\frac{1}{3}\sim-1$$

$$1=\frac{7}{3}\sim$$

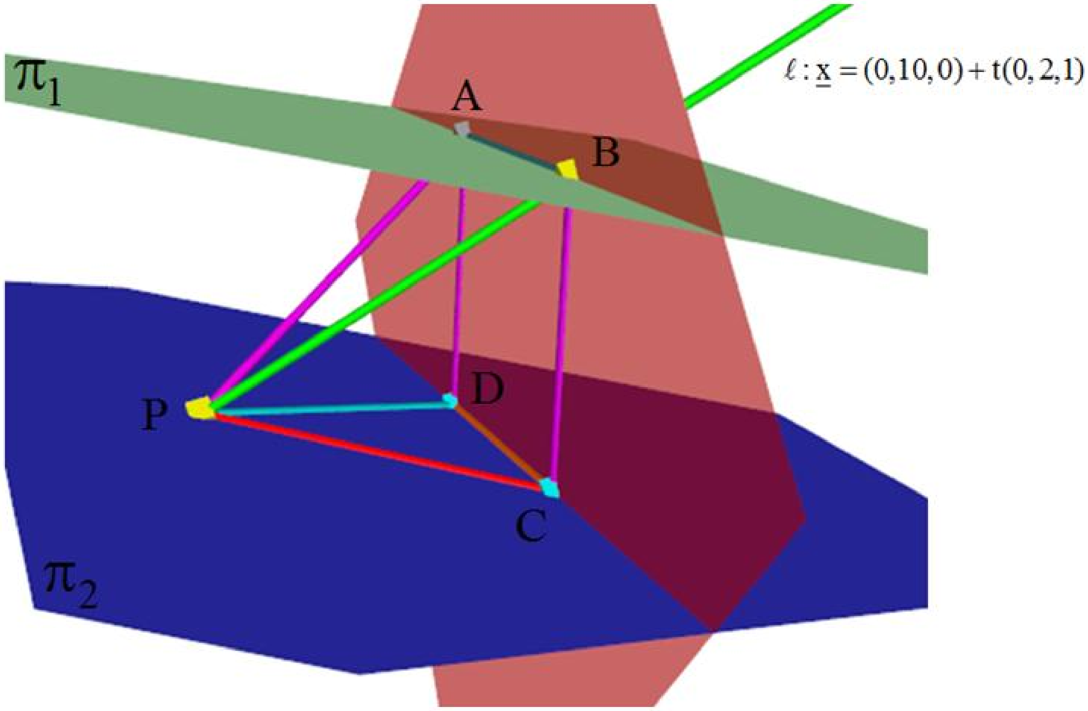
$$\boxed{\sim\ =\frac{3}{7}}\quad\rightarrow\boxed{\beta=\frac{6}{7}}$$

תשובה:

הנקודה S **מחלקת את** AM **ביחס של** $3:4$ $\qquad(AS:SM=3:4)$

הנקודה S **מחלקת את** DR **ביחס של** $6:1$ $\qquad(DS:SR=6:1)$

לפניכם המחשה תלת ממדית של נתוני התרגיל



באדיבות: סרור אסעד – math007@gmail.com
פורום מתמטיקה בהנאה

נתונות שתי משוואות של מישורים: $\text{®}_1 : 2x + y + 2z + 10 = 0$ **,** $\text{®}_2 : 2x + y + 2z - 10 = 0$

וקטור המקדמים, הנורמל של המישור, הוא זהה $\underline{x} = (2,1,2)$ **ולכן המישורים מקבילים.**

בהתאם, האנכים BC **ו-** AD **יוצרים מלבן** ABCD **, שהוא בסיס הפירמידה** PABCD **,**

כאשר גובה הפירמידה יהיה מרחק הנקודה P **ממישור הבסיס** ABCD **.**

הישר $\ell : \ \underline{x} = (0,10,0) + t(0,2,1)$ **חותך את המישור** ®_1 **בנקודה** B **.**

נקודה טיפוסית על הישר $(0, 10+2t, t)$ **.**

נציב במשוואת המישור ®_1 **ונקבל:** $2 \cdot 0 + 10 + 2t + 2t + 10 = 0 \quad \to t = -5 \quad \to \mathrm{B}(0,0,-5)$

נציב במשוואת המישור ®_2 **ונקבל:** $2 \cdot 0 + 10 + 2t + 2t - 10 = 0 \quad \to t = 0 \quad \to \mathrm{P}(0,10,0)$

נציב שיעורי $\mathrm{A}(-5,0,z)$ **במשוואת המישור** ®_1 **ונקבל:** $2 \cdot (-5) + 0 + 2z + 10 = 0 \quad \to z = 0 \quad \to \mathrm{A}(-5,0,0)$

נמצא את שטח הבסיס ABCD **.**

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-5-0)^2 + (0-0)^2 + (0-(-5))^2} = \sqrt{50}$$

אורך מקצוע הבסיס AD **הוא המרחק בין שני המישורים המקבילים:** $\mathrm{AD} = \frac{|10-(-10)|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{20}{3}$

נמצא את משוואת המישור ABCD **שהנורמל שלו הוא** $\underline{x}=(a,b,c)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathrm{B}-\mathrm{A}=\underline{x}=(5,0,-5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\underline{n}=(2,1,2)$

וההצגה הפרמטרית של מישור בסיס הפירמידה היא $® : (-5,0,0)+t(1,0,-1)+s(2,1,2)$

נמצא את משוואת המישור

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\ (1,0,-1)=0 \quad \to a-c=0 \quad \to a=c \\ (a,b,c)\ (2,1,2)=0 \quad \to 2a+b+2c=0\end{array}\right\} 2c+b+2c=0 \quad \to b=-4c$$

נסמן $a=1$ **ומכאן ש-** $b=-4,\quad c=1$ **ומשוואת המישור** $® : x-4y+z+d=0$

נציב את שיעורי הנקודה $\mathrm{A}(-5,0,0)$ $\quad -5-4\cdot 0+0+d=0 \quad \to d=5$

$$\boxed{® : x-4y+z+5=0}$$

גובה הפירמידה, כאמור, מרחק הנקודה P **ממישור הבסיס** ABCD. $\mathrm{h}=\dfrac{|0-4\cdot 10+0+5|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\dfrac{35}{\sqrt{18}}$.

מחשב את נפח הפירמידה: $V=\dfrac{\sqrt{50}\cdot\frac{20}{3}\cdot\frac{35}{\sqrt{18}}}{3}=129\frac{17}{27}$.

תשובה: נפח הפירמידה הוא $129\frac{17}{27}$ **יח"ק.**

א. (1) נתון $z+\frac{1}{z}=2\cos$ **, , כאשר** $z\neq 0$ **.**

נפתור את המשוואה:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos$$
$$z^2+1=2z\cos$$
$$z^2-2z\cos\quad+1=0$$
$$z_{1,2}=\frac{2\cos\quad\pm\sqrt{4\cos^2\quad-4}}{2}$$
$$z_{1,2}=\frac{2\cos\quad\pm 2\sqrt{-(1-\cos^2\quad)}}{2}$$
$$z_{1,2}=\cos\quad\pm\sqrt{-\sin^2}$$
$$z_{1,2}=\cos\quad\pm i\sin$$
$$z_1=\cos\quad+i\sin\quad\rightarrow\boxed{z_1=cis}$$
$$z_2=\cos\quad-i\sin\quad\rightarrow z_2=\cos(-\quad)+i\sin(-\quad)\quad\rightarrow\boxed{z_2=cis\,(-\quad)}$$

תשובה: $z_1=cis$ **,** $z_2=cis\,(-\quad)$ **(שני מספרים הנמצאים על מעגל היחידה).**

(2) נבדוק את הביטוי $z_n+\frac{1}{z_n}$ **, עבור** $z_1=cis$ **או** $z_2=cis\,(-\quad)$

$$(cis\quad)^n+\frac{1}{(cis\quad)^n}=(cis\quad)^n+\frac{cis\,0}{(cis\quad)^n}=cis\,(n\quad)+cis\,(-n\quad)$$

ובהתאם פישוט הביטוי יתאים לשני הפתרונות שמצאנו.

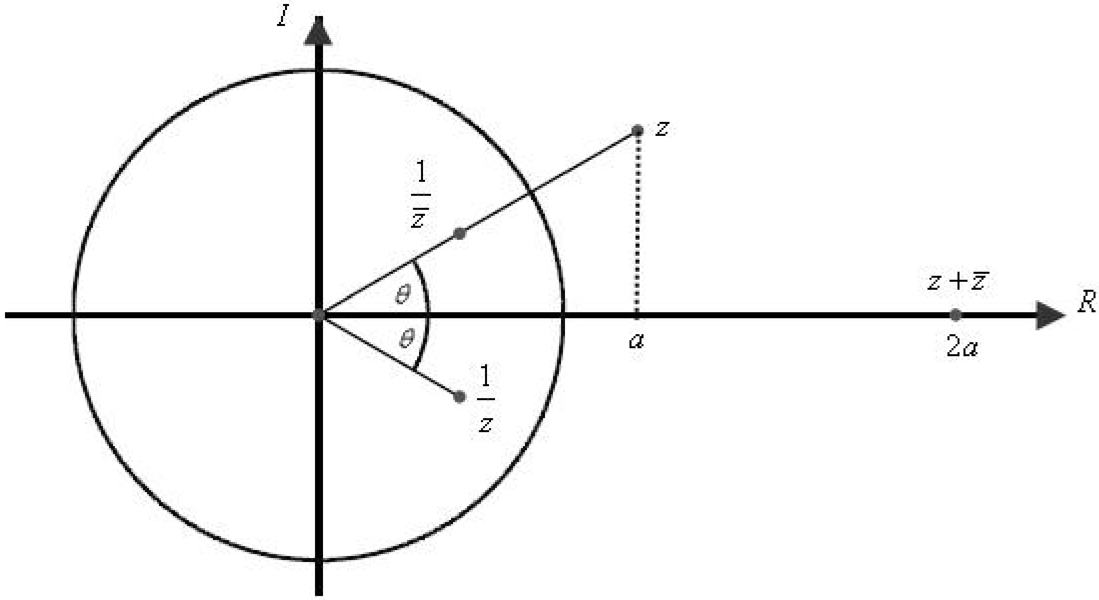
$$(cis\quad)^n+\frac{1}{(cis\quad)^n}=\cos\,(n\quad)+i\sin\,(n\quad)+\cos\,(-n\quad)+i\sin\,(-n\quad)$$
$$(cis\quad)^n+\frac{1}{(cis\quad)^n}=\cos\,(n\quad)+i\sin\,(n\quad)+\cos\,(n\quad)-i\sin\,(n\quad)$$
$$(cis\quad)^n+\frac{1}{(cis\quad)^n}=2\cos\,(n\quad)$$

וקבלנו את הביטוי $2\cos\,(n\quad)$ **שהוא מספר ממשי טהור.**

תשובה: מספר ממשי טהור.

ב. (1) נסמן את z בציור, כאשר $z=rcis\theta$ עבור תתי סעיף (1) ו- (2)

z מחוץ למעגל היחידה ולכן $r>1$.



$$\frac{1}{z}=\frac{1cis\,0}{rcis\theta}=\frac{1}{r}cis(-\theta)$$

בהתאם אורך המספר קטן מ- 1 ולכן $\frac{1}{z}$ בתוך מעגל היחידה,

כאשר הזווית שווה בגודלה אולם עם כיוון השעון.

תשובה: מיקום $\frac{1}{z}$ ברביע הרביעי בתוך מעגל היחידה.

(2) $$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1\,cis\,0}{rcis\,(-\theta)}=\frac{1}{r}cis\theta$$

בהתאם אורך המספר קטן מ- 1 ולכן $\frac{1}{\bar{z}}$ בתוך מעגל היחידה,

כאשר הזווית שווה בגודלה ובמיקומה לזווית של z.

תשובה: מיקום $\frac{1}{\bar{z}}$ ברביע הראשון בתוך מעגל היחידה.

(3) נסמן $z=a+bi$ (מטעמי נוחות).

$$z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a$$

ולכן $z+\bar{z}$ הוא מספר ממשי טהור שערכו $2a$ והוא מונח על הקרן החיוביות של ציר ה- x.

במקרה שמוצג בסרטוט הנ"ל נבחר $a>0.5$ (כי $2a>1$) ולכן $z+\bar{z}$ מונח מחוץ למעגל היחידה.

אם היינו בוחרים $a=0.5$ (כי $2a=1$) אז $z+\bar{z}$ היה מונח על מעגל היחידה (בנקודה $(1,0)$)

אם היינו בוחרים $a<0.5$ (כי $2a<1$) אז $z+\bar{z}$ היה בתוך מעגל היחידה.

תשובה: $z+\bar{z}$ מונח בכל נקודה על הקרן החיוביות של ציר ה- x.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2^{x-3}-b$ **, המוגדרת לכל** x **, כאשר** $b>1$ **.**

(1) הפונקציה $y=a^x$ **שואפת ל-** 0 **כאשר** $x\to-\infty$ **עבור** $a>1$ **.**

בהתאם $\lim\limits_{x\to-\infty}=2^{x-3}-b=0-b=-b$

תשובה: $y=-b$ **אסימפטוטה אופקית עבור** $x\to-\infty$ **(אין אסימפטוטה אנכית).**

(2) הפונקציה $y=a^x$ **עולה לכל** x **כאשר** $a>1$ **(הנגזרת חיובית לכל** x **)**

בהתאם $f(x)=2^{x-3}-b$ **עולה לכל** x **,** $f'(x)=2^{x-3}\cdot\ell n\,2=+\cdot+>0$

תשובה: עלייה – כל x **, ירידה – אף** x **.**

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$

בהתאם $x=3+\ell og_2 b \leftarrow x-3=\ell og_2 b \leftarrow 2^{x-3}=b \leftarrow 2^{x-3}-b=0$ **עולה לכל** x

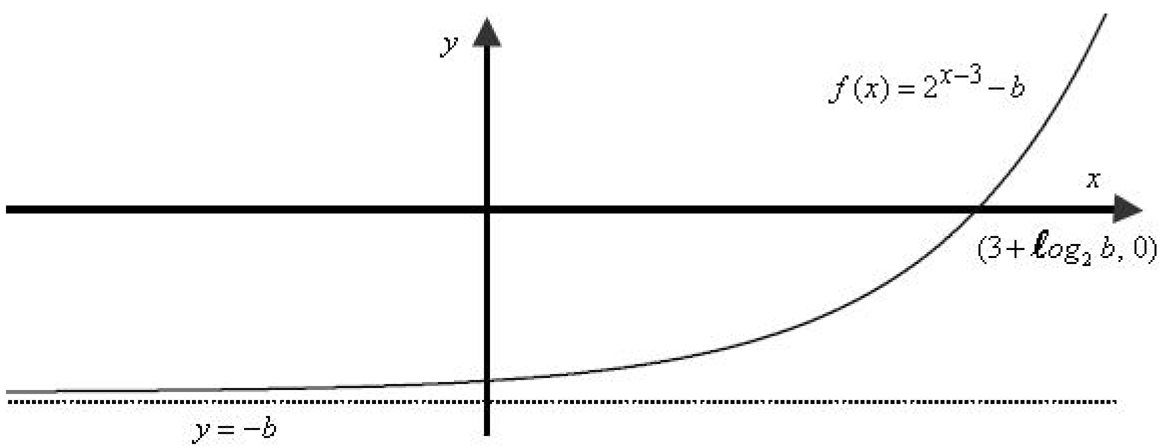
בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$

$$f(0)=2^{0-3}-b=\frac{1}{8}-b \qquad \to(0,\frac{1}{8}-b)$$

תשובה: $(3+\ell og_2 b,0)$ **,** $(0,\frac{1}{8}-b)$

<u>הערה</u> – תשים לב, עבור סעיף ג, שכיוון ש- $b>1$ **הרי ש** $\ell og_2 b>0$ **ולכן** $3+\ell og_2 b>3$ **.**

(4) סרטוט הפונקציה



ב. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$

(1) נציג את הפונקציה בתחום מפוצל:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge 3+\ell og_2 b \\ -f(x) & x<3+\ell og_2 b \end{cases}$$

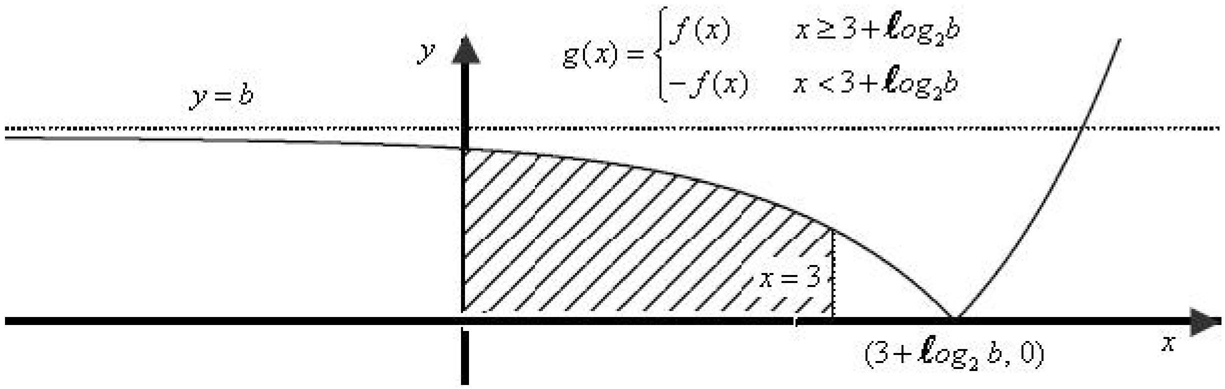
בנקודה $(3+\ell og_2 b, 0)$ **הפונקציה** $g(x)$ **אינה גזירה, דבר שבא לידי ביטוי בצורת הגרף ("שפיץ").**

האסימפטוטה האופקית, בהתאם, להיפוך הגרף משמאל לציר ה- y

$y=b$ **אסימפטוטה אופקית עבור** $x\to-\infty$ **(אין אסימפטוטה אנכית).**

תשובה: $y=b$

(2) סרטוט הפונקציה, כולל סימון השטח עבור סעיף ג.



ג. נחשב את השטח המבוקש (מקווקו בציור)

$$S=\int_0^3 (g(x)-0)\,dx=\int_0^3 (-f(x))\,dx=\int_0^3 (-2^{x-3}+b)\,dx$$

$$S=-\frac{2^{x-3}}{\ell n2}+bx\Big]_0^3$$

$$S=(-\frac{2^{3-3}}{\ell n2}+b\cdot 3)-(-\frac{2^{0-3}}{\ell n2}+b\cdot 0)$$

$$S=(-\frac{1}{\ell n2}+3b)-(-\frac{1}{8\ell n2})$$

$$S=3b-\frac{7}{8\ell n2}$$

תשובה: גודל השטח $3b-\frac{7}{8\ell n2}$ **יח"ר.**