.1

א. נסמן ב- x את כמות תמיסת המלח בכלי א' (גרמים)

ולכן $x+50$ כמות תמיסת המלח בכלי ב' (גרמים)

נבנה טבלה המתאימה לסיפור המעשה:

	כמות תמיסה	ריכוז	מלח טהור
מצב ראשוני			
כלי א'	x	0.2	$0.2x$
כלי ב'	$x+50$	0.1	$0.1(x+50)$
אילו היו מוסיפים 50 גרם מים לכלי א', ומאדים 93.75 גרם מים מהכמות שבכלי ב'			
כלי א'	$x+50$	$\frac{0.2x}{x+50}$	$0.2x$
כלי ב'	$x+50-93.75=$ $=x-43.75$	$\frac{0.1(x+50)}{x-43.75}$	$0.1(x+50)$

לאחר התוספת והאידוי מקבלים ריכוז שווה של המלח בשני הכלים.נפתור את המשוואה:

$$\frac{0.2x}{x+50}=\frac{0.1(x+50)}{x-43.75}$$

$$\Leftrightarrow 0.2x^2-8.75x=0.1x^2+5x+5x+250=0$$

$$\Leftrightarrow 0.1x^2-18.75x-250=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{18.75\pm 21.25}{0.2}$$

$$\boxed{x_1=200} \quad \cancel{x_2<0}$$

תשובה: בכלי הראשון יש 200 גרם תמיסת מלח .

ב. בכלי א' היו 200 גרם תמיסת מלח, מתוכם 40 גרם מלח טהור

אם נוסיף 50 גרם מים נקבל 250 גרם תמיסה, בריכוז של $16\%=0.16=\frac{40}{250}$ **.**

בכלי ב' היו 250 גרם תמיסת מלח, מתוכם 25 גרם מלח טהור

אם נאדה 93.75 גרם מים, נקבל 156.25 גרם תמיסה בריכוז של $16\%=0.16=\frac{25}{156.25}$

תשובה: 16%

2.

א. נציב $n=1$ **ולאחר מכן** $n=2$ **ונקבל שתי משוואות בשני נעלמים**

$$n=1 \quad \rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}=2-\frac{A\cdot 1+2}{B\cdot 2^{2\cdot 1}} \quad \rightarrow \boxed{A+2=4B}$$

$$n=2 \quad \rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}=2-\frac{A\cdot 2+2}{B\cdot 2^{2\cdot 2}} \quad \rightarrow \boxed{2A+2=6B}$$

$$\begin{cases} A+2=4B & \cdot -2 \\ 2A+2=6B \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2A-4=-8B \\ 2A+2=6B \end{cases}$$

$$-2=-2B \quad \rightarrow \boxed{B=1, \quad A=2}$$

ב. יש להוכיח כי $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{4^2}+\ldots\_+\frac{2n}{2^{2n}}=2-\frac{2n+2}{2^{2n}}$

(1) הטענה התקבלה כנתון, בסעיף א', עבור $n=1$

(2) נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{4^2}+\ldots\_+\frac{2k}{2^{2k}}=2-\frac{2k+2}{2^{2k}}$

(3) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{4^2}+\ldots\_+\frac{2k}{2^{2k}}}_{\downarrow}+\frac{2k+1}{2^{2k+1}}+\frac{2k+2}{2^{2k+2}}=2-\frac{2k+4}{2^{2k+2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2-\frac{2k+2}{2^{2k}} \quad +\frac{2k+1}{2\cdot 2^{2k}}+\frac{2k+2}{4\cdot 2^{2k}}=2-\frac{2k+4}{4\cdot 2^{2k}}=$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow 2-\frac{8k+8-4k-2-2k-2}{4\cdot 2^{2k}}=2-\frac{2k+4}{4\cdot 2^{2k}}$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{2k+4}{4\cdot 2^{2k}}=2-\frac{2k+4}{4\cdot 2^{2k}}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

(4) בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

.3

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

נגזור את הפונקציה ונראה כי סימן הנגזרת חיובי

$$\boxed{f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}}$$

מכנה הנגזרת חיובי לכל x **, מונה הנגזרת חיובי –**

לכן הפונקציה עולה לכל x **(קל לראות שהפונקציה מוגדרת לכל** x **)**

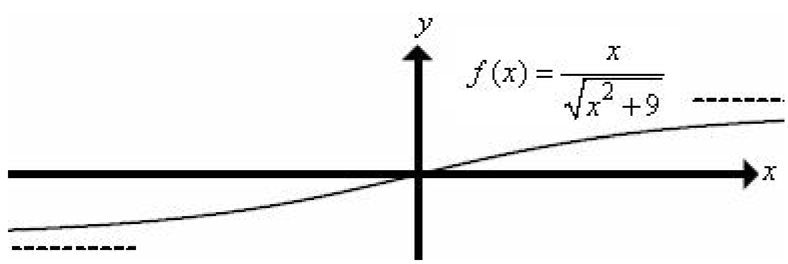
ב. סימן ערכי הפונקציה נקבע בהתאם למונה

כאשר $x>0$ **הפונקציה חיובית, וכאשר** $x<0$ **הפונקציה שלילית**

או, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}=\pm1$

לכן יש שתי אסימפטוטות אופקיות: $y=1,\quad y=-1$

ג. קל לראות שהפונקציה עוברת בראשית הצירים.



ד. נמצא את המשיק העובר בראשית הצירים

$$f'(0)=\frac{9}{(0^2+9)\sqrt{0^2+9}}=\frac{1}{3}$$

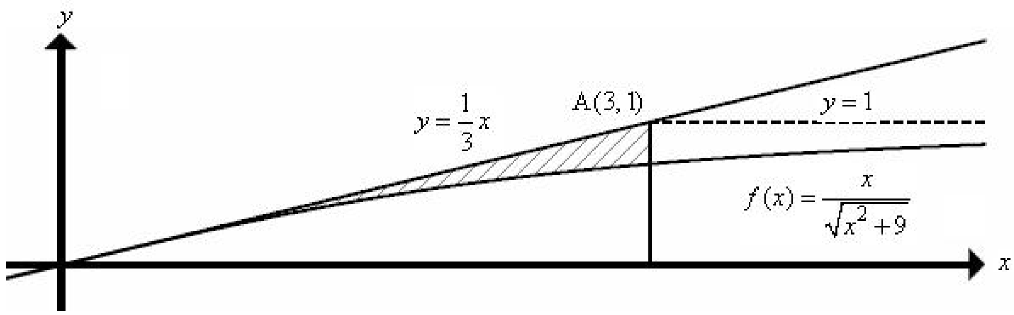
ולכן משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{3}x$

(1) נחפש נקודות חיתוך עם הפונקציה

$$\frac{1}{3}x=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \quad / : x\neq 0$$
$$\frac{1}{3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$$
$$\sqrt{x^2+9}=3 \quad /(\,)^2$$
$$x^2+9=9$$
$$x=0$$

ולא קבלנו פתרון נוסף, פרט ל $x=0$

(2) נביא ציור מעודכן ונסביר בהמשך.



המשיך נפגש עם הישר $y=1$ **בנקודה** A **.**

נמצא את נקודת המפגש:

$$\frac{1}{3}x=1$$
$$x=3$$

ולכן נקודת המפגש A(3,1)

נכין את הנגזרת הפנימית של הביטוי שבתוך השורש

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot 2x\,dx==\frac{\sqrt{u}}{2\cdot 0.5}+c=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+9}+c=\sqrt{x^2+9}+c$$

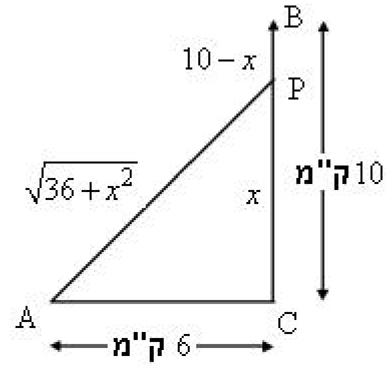
נמצא את גודל השטח המקווקו בציור

$$\int_0^3\left(\frac{1}{3}x-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\frac{x^2}{6}-\sqrt{x^2+9}\ \Big]_0^3$$
$$=\left(\frac{3^2}{6}-\sqrt{3^2+9}\right)-\left(\frac{0^2}{6}-\sqrt{0^2+9}\right)$$
$$=(1.5-\sqrt{18})-(-3)=4.5-\sqrt{18}=0.257$$

תשובה: 0.257

.4

נשרטט את הציור הראשוני, כאשר נסמן ב- x **את הקטע** CP



הפונקציה שיש להביא *למינימום* **היא** *זמן הנסיעה של הג'יפ במסלול* APB

כידוע, $t=\frac{S}{v}$ **, , משולש** APC **על-פי התיאור הוא ישר זווית, לכן,** $AP=\sqrt{36+x^2}$

ובהתאם זמן הנסיעה בחולות, בקטע AP **הוא** $\frac{\sqrt{36+x^2}}{v}$ **, וזמן הנסיעה בכביש, בקטע** PB **הוא** $\frac{10-x}{2.6v}$

ולכן, הפונקציה שיש להביא למינימום היא:

$$\boxed{f(t)=\frac{\sqrt{36+x^2}}{v}+\frac{10-x}{2.6v}}$$

$$f'(t)=\frac{1}{v}\cdot\left(\frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}}-\frac{1}{2.6}\right)$$

$$\boxed{f'(t)=\frac{1}{v}\cdot\left(\frac{2.6x-\sqrt{36+x^2}}{2.6\sqrt{36+x^2}}\right)}$$

$$2.6x-\sqrt{36+x^2}=0$$

$$2.6x=\sqrt{36+x^2} \quad /(\,)^2$$

$$6.76x^2=36+x^2$$

$$5.76x^2=36$$

$$\boxed{x=2.5} \quad \leftarrow x>0$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

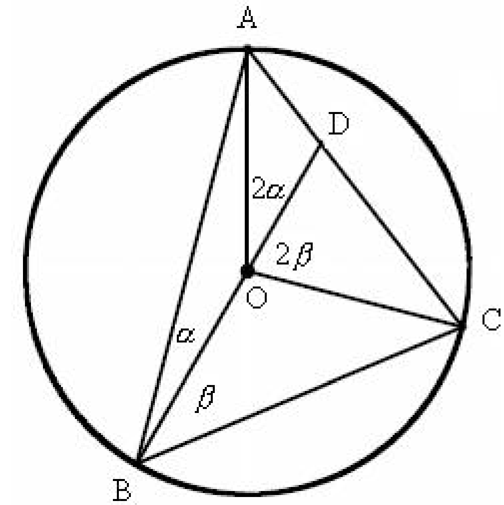
$y'(1)<0 \quad y'(9)>0$

x	10		2.5		0
y'		+	0	-	
מסקנה		↗	**Min**	↘	

תשובה: 2.5 **ק"מ**

5.

א. נעלה את השרטוט המעודכן והסברים בהמשך:



נוסיף בניות עזר: רדיוסים ל- A **ול-** B.

ניתן להאריך את BD **עד הקשת** AC**, דבר המבהיר שזוויות** $\angle AOD$ **ו-** $\angle DOC$ **הינן מרכזיות,**

ובהתאם גודלן כפול מהזוויות ההיקפיות המתאימות – לכן, $\angle DOC = 2$, $\angle AOD = 2\sim$ **.**

נשתמש פעמיים במשפט הסינוסים, כאשר נזכור שזוויות $\angle ADO + \angle CDO = 180°$ **(זוויות צמודות)**

ומכיוון ו- $\sin x = \sin(180° - x)$ **, הרי שהסינוסים שלהן שווים.**

<u>ΔADO</u>

$$\frac{AO}{\sin\angle ADO} = \frac{AD}{\sin 2\sim} \rightarrow \frac{R}{\sin\angle ADO} = \frac{AD}{\sin 2\sim}$$

<u>ΔCDO</u>

$$\frac{CO}{\sin\angle CDO} = \frac{DC}{\sin 2} \rightarrow \frac{R}{\sin\angle CDO} = \frac{DC}{\sin 2}$$

$$\frac{AD}{\sin 2\sim} = \frac{DC}{\sin 2} \quad \leftarrow \sin\angle CDO = \sin\angle ADO$$

$$\boxed{\frac{AD}{DC} = \frac{\sin 2\sim}{\sin 2}}$$

תשובה: $\frac{AD}{DC} = \frac{\sin 2\sim}{\sin 2}$

ב. נציב $\sim = \frac{1}{2}$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin}{\sin 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cos} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos \quad = 1$$

מכיוון וזווית $\neq 0$ הפתרון נפסל

ג. כאשר AC קוטר, נקבל ש- $AD = DC = R$

מכיוון ו- BD עובר דרך מרכז המעגל, ו- D תתלכד עם O.

ובהתאם $\frac{AD}{DC} = 1$

תשובה: $\frac{AD}{DC} = 1$