נסמן ב- x את מהירות המכונית שיצאה מ- A

מהירות המכונית שיצאה מ- A קטנה ב- 20 קמ"ש

ממהירות המכונית שיצאה מ- B,

לכן מהירות המכונית שיצאה מ- B היא $x+20$

המרחק בין הערים 800 ק"מ והמכוניות נפגשו באמצע הדרך,

לכן כל מכונית עברה 400 ק"מ.

$s=vt$ **- המרחק (s) שווה למהירות (v) כפול זמן (t)**

נשלים את הנתונים בטבלה.

	t שעות	מהירות - v	דרך-מרחק - s ק"מ
מ- A ל- B	$\frac{400}{x}$	x	400
מ- B ל- A	$\frac{400}{x+20}$	$x+20$	400

מכונית אחת יצאה מ- A בשעה $6^{\underline{00}}$,

והמכונית האחרת יצאה מ- B בשעה $7^{\underline{00}}$

לכן המכונית שיצאה מ- B נסעה שעה אחת פחות

$$\frac{400}{x+20}+1=\frac{400}{x}$$

$$400x+x(x+20)=400(x+20)$$

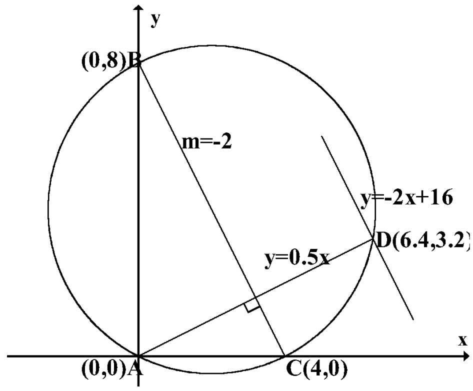
$$400x+x^2+20x=400x+8000$$

$$x^2+20x-8000=0$$

$$x_1=80,\quad x_2=-100$$

מהירות מכונית היא חיובית, לכן

מהירות המכונית שיצאה מ- A הייתה 80 קמ"ש



א.למציאת נקודות החיתוך עם ציר ה- y

נציב 0 **במקום** x **במשוואת המעגל** $(x-2)^2+(y-4)^2=20$

$$(0-2)^2+(y-4)^2=20 \rightarrow (y-4)^2=16 \rightarrow y^2-8y+16=16$$
$$y^2-8y=0 \rightarrow y(y-8)=0 \rightarrow y_1=0,\ y_2=8$$

ובהתאם לציור הנתון $A(0,0)$, $B(0,8)$

לנקודות החיתוך עם ציר ה- x **נציב** 0 **במקום** y **במשוואת המעגל**

$$(x-2)^2+(0-4)^2=20 \rightarrow (x-2)^2=4 \rightarrow x^2-4y+4=4$$
$$x^2-4y=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow x_1=0,\ x_2=4$$

ובהתאם לציור הנתון $A(0,0)$, $C(4,0)$

ב. שיפוע בין שתי נקודות ע"פ הנוסחה $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$m_{BC}=\frac{8-0}{0-4}=\frac{8}{-4}=-2$$

ולכן שיפוע BC **הוא** -2 **.** AD **מאונך ל-** BC

תנאי לניצבות $m_1\cdot m_2=-1$ **(שיפועים הופכים ונגדיים)**

ולכן שיפוע AD **הוא** -0.5

הנוסחה למשוואת ישר $y-y_1=m(x-x_1)$

$$m=\frac{1}{2},\quad (\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{0}) \rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-0) \rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

ומשוואת AD **היא** $y=\frac{1}{2}x$

ג. לישרים מקבילים שיפועים שווים,

לכן שיפוע הישר המקביל שווה ל- -2, כמו של BC .

נמצא את שיעורי נקודה D, נקודות החיתוך של AD עם המעגל

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20 \end{cases} \rightarrow (x-2)^2 + (0.5x-4)^2 = 20$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 + 0.25x^2 - 4x + 16 = 20$$

$$\rightarrow 1.25x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(1.25x-8) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, \quad 1.25x - 8 = 0 \rightarrow 1.25x = 8 \rightarrow x = 6.4$$

כלומר, שיעורי נקודה D הם $D(6.4, 3.2)$

$$m = -2, \quad (\overset{x_1}{6.4}, \overset{y_1}{3.2})$$

$$y - 3.2 = -2(x-6.4) \rightarrow y - 3.2 = -2x + 12.8 \rightarrow y = -2x + 16$$

ומשוואת הישר המקביל היא $y = -2x + 16$

א. נתונה הפונקציה $\boxed{y=\sqrt{-x^2+6x-5}}$ **, המוגדרת בתחום** $1\le x\le 5$**.**

נמצא את שיעורי הנקודה שבה נגזרת הפונקציה מתאפסת

$$\boxed{y'=\frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-5}}}$$

$$0=\frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-5}} \quad \to 0=-2x+6 \quad \to 2x=6 \quad \to x=3$$

$$y(3)=\sqrt{-3^2+6\cdot 3-5}=2$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$f'(2)=-2\cdot 2+6<0, \quad f'(4)=-2\cdot 4+6<0$

2	3	4	x
+	0	**-**	y'
↗	**Max**	↘	**מסקנה**

תשובה: $(3,2)$ **מקסימום.**

ג. <u>נקודות קצה</u> - נציב 1 **ו-** 5 **במקום** x **בתבנית הפונקציה**

$$f(1)=\sqrt{-1^2+6\cdot 1-5}=0$$

$$f(5)=\sqrt{-5^2+6\cdot 5-5}=0$$

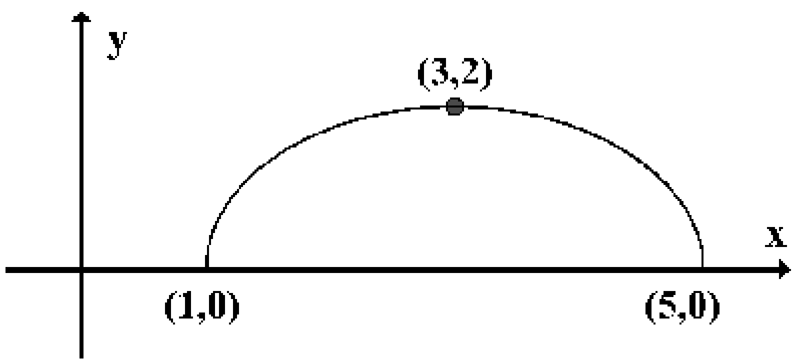
נקודות הקצה הן נקודות חיתוך עם ציר ה- x $(1,0),\ (5,0)$

ד. <u>הסקיצה המתאימה</u>

נכין טבלת ערכים קטנה, שתעזור גם לציור הסקיצה (בסיוע מחשבון)

הטבלה גם מאששת את היות נקודת הקיצון מקסימום!

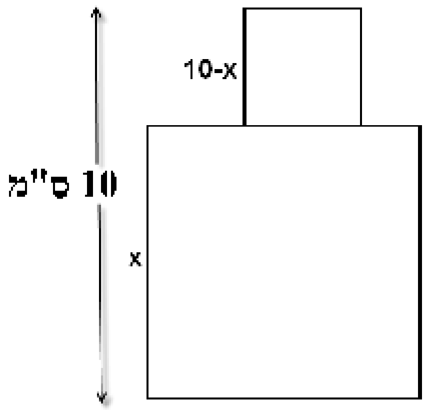
5	4.9	3	1.1	1	x
0	0.39	2	0.62	0	y



א. נסמן ב-x את אורך הצלע של הריבוע התחתון

ומכיוון וגובה הצורה הוא 10 ס"מ

אז אורך הריבוע התחתון הוא $10-x$.



הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *שטח הצורה*

שטח הריבוע התחתון $x\cdot x=x^2$

שטח הריבוע העליון $(10-x)^2=100-20x+x^2$

שטח הצורה הוא סכום השטחים: $2x^2-20x+100$

ב. נמצא את נקודת הקיצון

$\boxed{f(x)=2x^2-20x+100}$

$\boxed{f'(x)=4x-20}$

$0=4x-20 \quad \rightarrow 4x=20 \quad \rightarrow x=5$

לכן $x=5$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון

$f'(4)=4\cdot 4-20<0,\quad f'(4)=4\cdot 6-6>0$

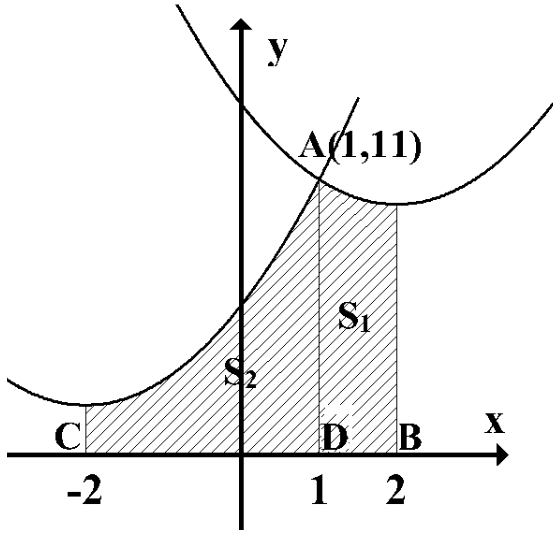
x	6	5	4
y'	+	0	-
מסקנה	↗	Min	↘

תשובה: אורך הריבוע התחתון 5 ס"מ

יביא את שטח הצורה למינימום

הערה: עבור מקרי הקצה $x=0,10$ מקבלים שטח מקסימלי.

א. נחלק את השטח המבוקש לשני שטחים, כמסומן בציור הבא:



נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 6 \\ y = x^2 - 4x + 14 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 6 = x^2 - 4x + 14 \quad \Leftrightarrow 8x = 8$$

$$\Leftrightarrow x_A = 1 \rightarrow y_A = 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 = 11$$

לכן שיעורי נקודת החיתוך הם $(1,11)$

ב. נכין טבלה לסיוע בחישוב השטחים

S_2	S_1	
$f(x) = x^2 + 4x + 6$	$g(x) = x^2 - 4x + 14$	**פונקציה עליונה**
$y = 0$	$y = 0$	**פונקציה תחתונה**
$x_D = 1$	$x_B = 2$	x **גדול**
$x_C = -2$	$x_D = 1$	x **קטן**

נחשב את שני השטחים ולאחר מכן נחבר את התוצאות

$$S_1 = \int_1^2 (x^2 - 4x + 14)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}} x^2}{\cancel{2}} + 14x \Big]_1^2$$

$$S_1 = (\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2) - (\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1) = 22\frac{2}{3} - 12\frac{1}{3} = 10\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_{-2}^{1} (x^2 + 4x + 6)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}} x^2}{\cancel{2}} + 6x \Big]_{-2}^{1}$$

$$S_2 = (\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1) - (\frac{(-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2)) = 8\frac{1}{3} - (-6\frac{2}{3}) = 15$$

$$S = S_1 + S_2 = 10\frac{1}{3} + 15 = 25\frac{1}{3}$$

גודל השטח המקווקו הוא $25\frac{1}{3}$