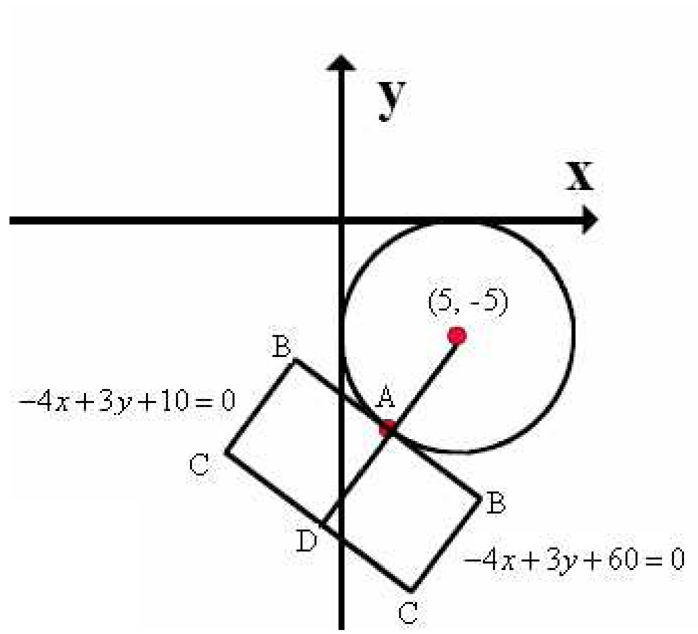
.1

א. נסמן את הפתרונות על הציור ונביא את ההוכחה לאחר מכן

(מובא ציור של מעגל אחד, מתוך השניים המתקבלים).



המעגל העובר דרך הנקודה $A(2,-9)$ **ומשיק לצירים.**

בהתאם, המעגל תחום לרביע הרביעי.

מכיוון והמעגל משיק לצירים, הרי שמרחק מרכז המעגל מהצירים הוא R

מרכז המעגל עם שיעור y **שלילי ושיעור** x **חיובי**

ולכן משוואת המעגל: $(x-R)^2+(y+R)^2=R^2$

נציב את $A(2,-9)$ **הנמצאת על המעגל.**

$$(2-R)^2+(-9+R)^2=R^2$$
$$4-4R+R^2+81-18R+R^2=R^2$$
$$R^2-22R+85=0$$
$$R=17,5$$

תשובה: $(x-17)^2+(y+17)^2=289$ **,** $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

ב. הצלע AB **של ריבוע** ABCD **משיקה בנקודה** A(2, -9)

למעגל $(x-5)^2+(y+5)^2=25$ **(המעגל עם הרדיוס הקטן).**

שיפוע BC **שווה לשיפוע** AD **(צלעות נגדיות מקבילות בריבוע)**

מכיוון ו- AB **משיקה למעגל היא מאונכת לרדיוס**

ולכן הצלע AD **היא המשך של הרדיוס (צלעות הריבוע ניצבות זו לזו)**

נמצא את משוואת הרדיוס לנקודת ההשקה, שהיא גם משוואת הצלע AB

$$m=\frac{-9+5}{2-5}=\frac{4}{3}$$

$$y+5=\frac{4}{3}(x-5)$$

$$\boxed{-4x+3y+35=0}$$

אורך צלע הריבוע הוא כרדיוס המעגל, כלומר 5**, שזה המרחק בין הצלעות המקבילות של הריבוע:** AD **ו-** BC

נשתמש בנוסחה למרחק בין ישרים מקבילים: $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$5=\frac{|c-35|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}$$

$$25=|c-35|$$

$$25=c-35 \qquad 25=-c+35$$

$$c=60 \qquad c=10$$

מקבלים שתי משוואות אפשריות:

$-4x+3y+60=0$ **,** $-4x+3y+10=0$

קיימות שתי אפשרויות לצלע BC**, מעל או מתחת לצלע** AD

נמצא את משוואת הצלע AB **על-מנת לוודא, במקביל לציור,**

שקדקוד B **ברביע הרביעי.**

$$m=-1:\frac{4}{3}=-0.75$$

$$y+9=-0.75(x-2)$$

$$\boxed{y=-0.75x-7.5}$$

שחותכת את ציר ה- y **בנקודה** $(0,-7.5)$

שמרחקה מ- A(2, -9) **הוא:** $d=\sqrt{(0-2)^2+(-7.5+9)^2}<5$

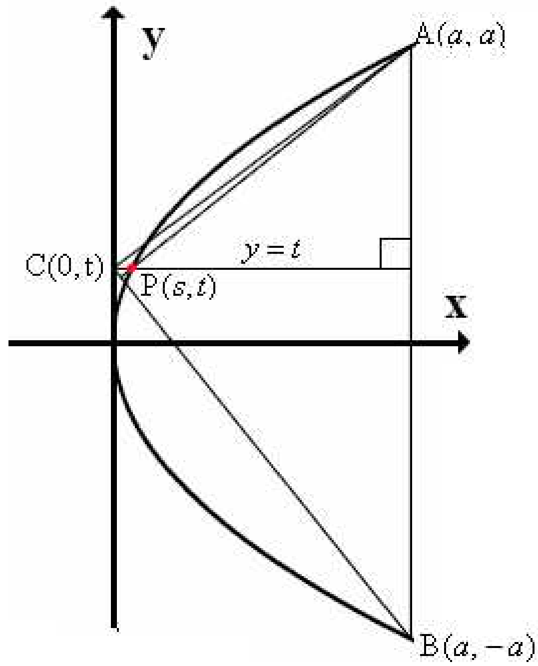
ולכן והקדקוד B **לא נמצא ברביע הרביעי והפתרון נפסל**

עבור $-4x+3y+60=0$ **קדקוד** B **בוודאות ברביע הרביעי (ראה ציור)**

תשובה: $-4x+3y+60=0$

2.

א. נסמן את הפתרונות על הציור ונביא את ההוכחה לאחר מכן



שני קדקודים של משולש הם $A(a,a)$ **ו-** $B(a,-a)$**.**

בהתאם, הצלע AB **מקבילה לציר ה-** y **והגובה לקדקוד יהיה מקביל לציר ה-** x**.**

נסמן $P(s,t)$ **מפגש הגבהים, שיימצא על הישר** $y=t$

הקדקוד השלישי C **נמצא על ציר ה-** y **, לכן:** $C(0,t)$

הגובה: AP **מאונך לצלע** BC **, לכן:** $m_{AP}\cdot m_{BC}=-1$

ובהתאם:

$$\frac{a-t}{a-s}\cdot\frac{-a-t}{a-0}=-1$$
$$\Leftrightarrow -a^2-at+at+t^2=-a^2+as$$
$$\Leftrightarrow t^2=as$$

ולכן: $y^2=ax$ **היא משוואת המקום הגיאומטריה וזו פרבולה**

תשובה: $y^2=ax$

ב. AC **משיק לפרבולה** $y^2 = ax$

קל לראות על-ידי הצבה שהנקודה $A(a, a)$ **על המקום הגיאומטרי**

ולכן זו נקודת ההשקה .

אם ישר משיק לפרבולה ונוגע בה ב- $A(a, a)$ **זו נקודת ההשקה**

כי שיפוע הפרבולה הולך וקטן, בעוד שיפוע הישר קבוע.

משוואת המשיק לפרבולה: $yy_0 = p(x + x_0)$ **, כאשר** $P = \frac{a}{2}$ **עבור** $y^2 = ax$

נציב $A(a, a)$ **במשוואת המשיק:** $ya = \frac{a}{2}(x + a)$

נציב $x = 0$ **למציאת שיעורי קדקוד** C

$$ya = \frac{a}{2}(0 + a)$$

$$y = \frac{a}{2}$$

ולכן $C(0, \frac{a}{2})$

נמצא את אורך AC

$$d_{AC} = \sqrt{(a - \frac{a}{2})^2 + (a - 0)^2} = \sqrt{1.25a^2}$$

$$d_{AC} = a\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\boxed{d_{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}}$$

תשובה: $d_{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

.3

א. נפח קוביה שווה לחזקה השלישית של אורך המקצוע,

שהוא המרחק בין המישורים: $x+2y+2z-2=0$ **ו-** $x+2y+2z-11=0$

נשתמש בנוסחה למרחק בין מישורים: $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

לכן המרחק בין שתי הפאות הנתונות הוא: $\dfrac{|-2+11|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$

אורך מקצוע הקוביה הוא 3 **ובהתאם נפח הקוביה** 27 **יח"ק**

תשובה: 27 **יח"ק**

ב. הפאה AB'B'A **נמצאת על המישור** $2x+y-2z=14$ **.**

מרחקה מהפאה [CC'D' **הוא, כצלע הקוביה** 3

נשתמש פעם נוספת בנוסחה למרחק בין מישורים

$$\frac{|d+14|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3$$

$$|d+14|=9$$

$$d+14=9 \qquad -d-14=9$$

$$d=-5 \qquad d=-23$$

ולכן $2x+y-2z=5$ **או** $2x+y-2z=23$

נמצא, עבור שתי אפשרויות את ישר החיתוך C'D

עם $x+2y+2z=11$ **מישור הפאה** A'B'C'D

$$+\begin{cases}2x+y-2z=5\\x+2y+2z=11\end{cases} \qquad +\begin{cases}2x+y-2z=23\\x+2y+2z=11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3x+3y=16 \qquad \Leftrightarrow 3x+3y=34$$

$$\Leftrightarrow x+y=\frac{16}{3} \qquad \Leftrightarrow x+y=\frac{34}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=t,\quad y=\frac{16}{3}-t \qquad \Leftrightarrow x=t,\quad y=\frac{34}{3}-t$$

$$\Leftrightarrow t+\frac{32}{3}-2t+2z=11 \qquad \Leftrightarrow t+\frac{68}{3}-2t+2z=11$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{6}+0.5t \qquad \Leftrightarrow z=-5\frac{5}{6}+0.5t$$

$$\Leftrightarrow (t,\frac{16}{3}-t,\frac{1}{6}+0.5t) \qquad \Leftrightarrow (t,\frac{34}{3}-t,t,-5\frac{5}{6}+0.5t)$$

C'D' : $(0,\frac{16}{3},\frac{1}{6})+t(1,-1,0.5)$ C'D' $(0,11\frac{1}{3},-5\frac{5}{6})+t(1,-1,0.5)$

תשובה: $(0,\frac{16}{3},\frac{1}{6})+t(1,-1,0.5)$ **,** $(0,11\frac{1}{3},-5\frac{5}{6})+t(1,-1,0.5)$

נכתב ע"י עפר ילין

4. א

(1) נתונה המשוואה $z^3 = \cos\text{¯} + i\sin\text{¯}$

או $z^3 = 1\text{cis}\text{¯}$

נשתמש בנוסחה למציאת שורש של מספר מרוכב

$z_k = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}(\frac{\text{¯}}{n} + \frac{2\text{®}k}{n})$ **, לכן:**

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\,\text{cis}(\frac{\text{¯}}{3} + \frac{2\text{®}\cdot 0}{3}) \rightarrow z_0 = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3})$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\,\text{cis}(\frac{\text{¯}}{3} + \frac{2\text{®}\cdot 1}{3}) \rightarrow z_1 = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3} + \frac{2\text{®}}{3})$$

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\,\text{cis}(\frac{\text{¯}}{3} + \frac{2\text{®}\cdot 2}{3}) \rightarrow z_2 = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3} + \frac{4\text{®}}{3})$$

תשובה: $z_0 = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3})$ **(ניתן לסמן כל אחד מהשורשים האחרים כ-** z_0**)**

(2) נזכיר כפל של מספרים מרוכבים, בהצגה קוטבית:

הרדיוס החדש הוא מכפלת הרדיוס והארגומנט הוא סכום הארגומנטים

$$r_1 cis\text{¯}_1 \cdot r_2 cis\text{¯}_2 = r_1 r_2 cis(\text{¯}_1 + \text{¯}_2)$$

$$z_1 = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3} + \frac{2\text{®}}{3}) = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3}) \cdot \text{cis}(\frac{2\text{®}}{3}) = z_0 \cdot \text{cis}120°$$

$$z_2 = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3} + \frac{4\text{®}}{3}) = \text{cis}(\frac{\text{¯}}{3}) \cdot \text{cis}(\frac{4\text{®}}{3}) = z_0 \cdot \text{cis}240°$$

תשובה: $z_1 = z_0 \cdot \text{cis}120°$ **,** $z_2 = z_0 \cdot \text{cis}240°$

ב.

יש לפתור את האי-שוויון $6\cdot\left[1+(\frac{9}{4})^{-x}-(\frac{2}{3})^{x}\right]<7\cdot(\frac{3}{2})^{-x}$

$$6\cdot\left[1+(\frac{9}{4})^{-x}-(\frac{2}{3})^{x}\right]<7\cdot(\frac{3}{2})^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 6\cdot\left[1+(\frac{3}{2})^{-2x}-(\frac{3}{2})^{-x}\right]<7\cdot(\frac{3}{2})^{-x}(\frac{3}{2})^{-x}=t$$

$$\Leftrightarrow 6\cdot\left[1+t^2-t\right]<7\cdot t \quad \leftarrow (\frac{3}{2})^{-x}=t$$

$$\Leftrightarrow 6+6t^2-6t<7t$$

$$\Leftrightarrow 6+6t^2-6t<7t$$

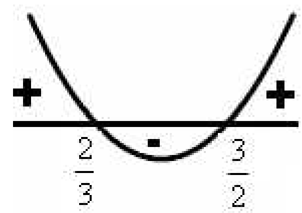
$$\Leftrightarrow \boxed{6t^2-13t+6<0}$$

$$6t^2-13t+6=0$$

$$t_{1,2}=\frac{13\pm5}{12}$$

$$t_1=\frac{3}{2},\quad t_2=\frac{2}{3}$$

נצייר את הפרבולה המתאימה לאי-השוויון שבמסגרת



ולכן : $\frac{2}{3}<t<\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}<(\frac{3}{2})^{-x}<\frac{3}{2}$

$$(\frac{3}{2})^{-x}>\frac{2}{3}=(\frac{3}{2})^{-1} \quad \cap \quad (\frac{3}{2})^{-x}<\frac{3}{2}=(\frac{3}{2})^{1}$$

$$-x>-1 \quad \cap \quad -x<1$$

$$x<1 \quad \cap \quad x>-1$$

תשובה: $-1<x<1$

.5

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$

לאור העובדה שנדרש בהמשך לחשב גודלו של שטח,
כדאי לעבד את הפונקציה בעזרת חילוק פולינומים
(מעלת פולינום המונה גדולה ממעלת פולינום המכנה)

$$\begin{array}{l|l} \underline{x-2} & \\ x^2-4x+5 & x-2 \\ \underline{x^2-2x} & \\ =-2x+5 & \\ \quad\underline{-2x+4} & \\ \quad = \quad 1 & \end{array}$$

לכן ניתן להציג את הפונקציה בתחום מפוצל

$$f(x)=\begin{cases} x-2+\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2 \\ \varnothing & x=2 \end{cases}$$

א. (1) נמצא את נקודות הקיצון

$$\boxed{f(x)=x-2+\frac{1}{x-2}}$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}$$

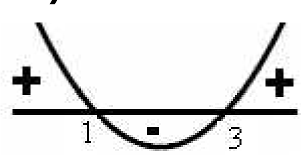
$$f'(x)=\frac{x^2-4x+4-1}{(x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}}$$

$$0=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$$x=1\rightarrow(1,-2)\qquad x=3\rightarrow(3,2)$$

נצייר את הפרבולה המתאימה לנגזרת (המכנה חיובי)



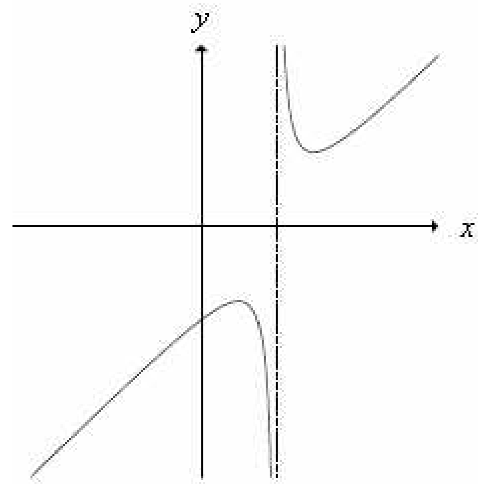
	1		2		3		x
+	0	-		-	0	+	y'
↗	**Max**	↘		↘	**Min**	↗	**מסקנה**

תשובה: $(3,2)$ **מינימום,** $(1,-2)$ **מקסימום**

(2) תחום ההגדרה של הפונקציה $x \neq 2$

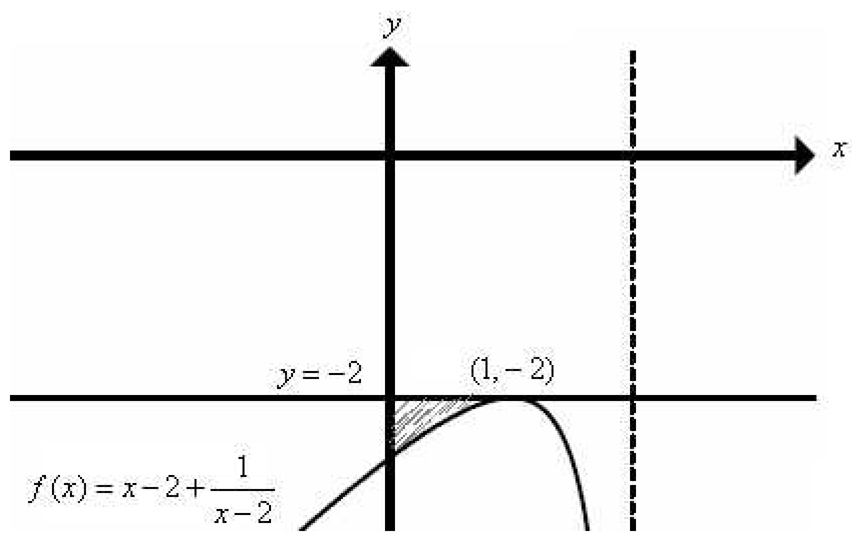
אסימפטוטה אנכית $x = 2$

(3)



ב. ישר בנקודת קיצון מקביל לציר ה- x

ולכן בנקודת המקסימום משוואת המשיק היא $y = -2$



נחשב את השטח הנדרש:

$$S = \int_0^1 (-2-(x-2+\frac{1}{x-2}))dx = \int_0^1 (-x-\frac{1}{x-2})dx$$

$$S = -\frac{x^2}{2} - \ln|x-2| \Big]_0^1$$

$$S = (-\frac{1^2}{2} - \ln|1-2|) - (-\frac{0^2}{2} - \ln|0-2|)$$

$$S = (-0.5 - \ln 1) - (-0 - \ln 2)$$

$$S = \boxed{\ln 2 - 0.5}$$

תשובה: $\ln 2 - 0.5$