א. ניתן למצוא תחילה מתי יחס המקדמים

של המשתנים x, y שונה זה מזה

אם $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ אז יש פתרון יחיד למערכת.

מכיוון ובסעיף ב' נדרש למצוא את הפתרון היחיד

ומצא את הפתרון, ותוך כדי כך את התנאי לקיומו

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad / \cdot m \\ (m^2+1)x + my = 1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2mx - my = m \quad / \cdot m \\ (m^2+1)x + my = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2m + m^2 + 1)x = m + 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(m+1)^2 x = m+1}$$

כאשר $m = -1$ נקבל $0x = 0$, כלומר פסוק אמת ואינסוף פתרונות.

נציב $m = -1$ במשוואות המקוריות

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ ואכן מקבלים שני ישרים שמתלכדים

תשובה: עבור $m \neq -1$ נקבל פתרון יחיד.

ב. בהתאם לסעיף א' שיעור ה- x של הפתרון היחיד הוא $\frac{1}{m+1}$:

נציב $\frac{1}{m+1}$ במקום x במשוואה הראשונה

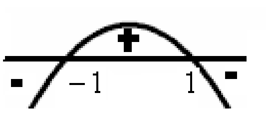
$$2\cdot\frac{2}{m+1}-y=1$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{2}{m+1}-1$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{2-m-1}{m+1}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1-m}{m+1}$$

והפתרון היחיד הוא $(\frac{1}{m+1},\frac{1-m}{m+1})$ **,** $m\neq-1$

נציב את הזוג הסדור $(\frac{1}{m+1},\frac{1-m}{m+1})$ **באי-שוויון** $y>-6x+3$

$$\frac{1-m}{m+1}>-6\cdot\frac{1}{m+1}+3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-m}{m+1}+\frac{6}{m+1}+-3>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-m+6-3m-3}{m+1}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4-4m}{m+1}>0 \quad /\cdot(m+1)^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{4(1-m)(m+1)>0}$$

נצייר את הפרבולה המתאימה:



תשובה: $-1<m<1$

.2

א. סכום 30 **האיברים הראשונים בסדרה חשבונית**

שווה לסכום 20 **האיברים הראשונים שלה, כלומר:** $S_{30} = S_{20}$

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$$

$$\frac{30}{2}(2a_1 + d(30-1)) = \frac{20}{2}(2a_1 + d(20-1))$$
$$\Leftrightarrow 15(2a_1 + 29d) = 10(2a_1 + 19d)$$
$$\Leftrightarrow 30a_1 + 435d = 20a_1 + 190d$$
$$\Leftrightarrow 10a_1 + 245d = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{2a_1 + 49d = 0}$$

אם לאחר פיתוח המשוואה הנתונה מקבלים ערך של

איבר בסדרה ניתן להיעזר בו, לעיתים, להמשך פתרון התרגיל.

במקרה זה לא קבלנו ערך של איבר,

אך נוכל להיעזר בביטוי שבמסגרת הן לסעיף א' והן לסעיף ב'.

נחשב את סכום 50 **האיברים הראשונים בסדרה**

$$S_{50} = \frac{50}{2}(2a_1 + d(50-1))$$
$$S_{50} = 25(2a_1 + 49d)$$
$$\boxed{S_{50} = 0} \quad \leftarrow 2a_1 + 49d = 0$$

הוכחנו.

ב. נבדוק מה מיקומו של האיבר החיובי הראשון,

כאשר נוסיף את הנתון שהסדרה עולה, כלומר $d > 0$

$$a_1 + (n-1)d > 0$$
$$\Leftrightarrow -24.5d + (n-1)d > 0 \quad / : d > 0$$
$$\Leftrightarrow -24.5 + n - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow n > 25.5$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_{26} > 0}$$

מכיוון והסדרה עולה, וסכום 50 **האיברים הראשונים בסדרה**

הוא אפס הרי ש- $a_1 < 0$

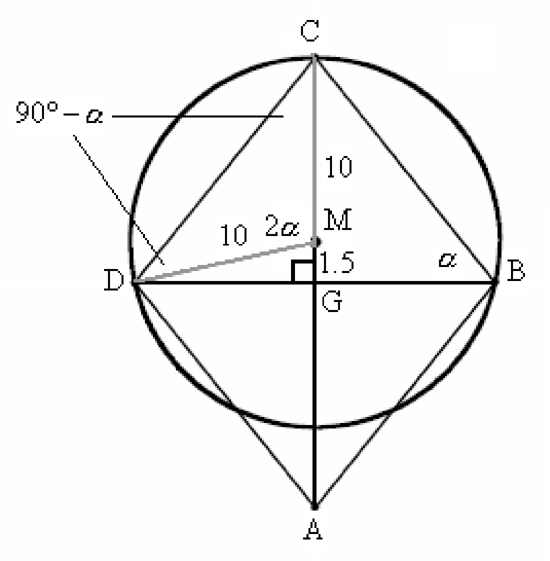
מכאן ש- a_{26} **הוא האיבר החיובי הראשון.**

תשובה: האיבר החיובי הראשון נמצא במקום ה- 26

אפשר גם:

$$2a_1 + 49d = 0 \quad /:2$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 24.5d = 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 25d > 0 \quad \leftarrow d > 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_{26} > 0}$$

.3
נסמן את הנתונים על הציור ונביא את ההוכחה לאחר מכן.



<u>נתונים</u>

1. $ABCD$ מעוין
2. נקודה M נמצאת על האלכסון AC
3. $MD = MC$

לסעיף ג':

4. רדיוס המעגל החוסם את המשולש DBC הוא 10 ס"מ
5. מרחק המרכז M מהאלכסון BD הוא 1.5 ס"מ

צ"ל: א. M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש DBC

ב. $\angle MDC + \angle DBC = 90°$

ג. שטח המעוין $ABCD$

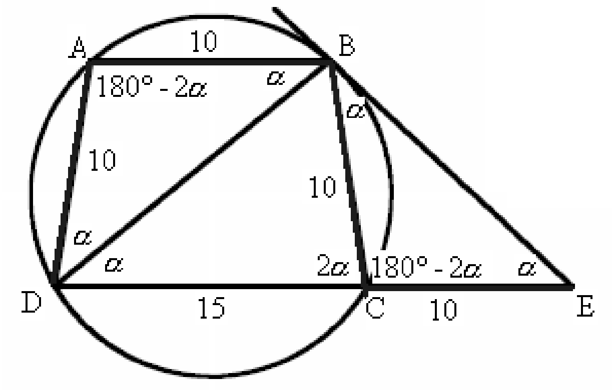
<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
1	6	$ABCD$ מעוין	נתון
6	7	G מפגש אלכסוני המעוין	סימון
6	8	$CG \perp BD$	אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה
6	9	G אמצע BD	אלכסוני המעוין חוצים זה את זה
5,6	10	M נמצאת על האלכסון AC	נתון
8,9	11	M נמצאת על האנך אמצעי לצלע BD ב- ΔCBD	AC מאונך לאלכסון BD וחוצה אותו
	12	$MD = MC$	נתון
11,12	13	M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש DBC	נמצאת על אנך אמצעי במשולש ובמרחקים שווים משני קדקודים

		מ.ש.ל. א	
	14	$\angle CBD = a$	**סימון**
13,14	**15**	$\angle CMD = 2a$	**זווית מרכזית גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת CD**
12	**16**	$\angle CDM = \angle MCD$	**מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ב- ΔCMD**
13	**17**	$\angle CDM = 90° - a$	**סכום זוויות ב- ΔCMD הוא $180°$**
14,17	**18**	$\angle MDC + \angle DBC = 90°$	**חישוב**
		מ.ש.ל ב	
4	**19**	**רדיוס המעגל החוסם משולש DBC הוא 10 ס"מ**	**נתון**
13,19	**20**	$MD = MC = 10$	**הצבה**
	21	**מרחק המרכז M מהאלכסון BD הוא 1.5 ס"מ**	**נתון**
8,21	**22**	$MG = 1.5$	**מרחק נקודה מישר הוא אורך האנך מהנקודה לישר**
	23	$CG = CM + MG$	**השלם שווה לסכום חלקיו**
20,22,23	**24**	$CG = 10 + 1.5 = 11.5$	**הצבה וחישוב**
6,24	**25**	$AC = 23$	**אלכסוני המעוין חוצים זה את זה**
8,19,22	**26**	$DG = \sqrt{10^2 - 1.5^2} = 9.887$	**משפט פיתגורס ΔDMG**
6,24	**27**	$BD = 19.774$	**אלכסוני המעוין חוצים זה את זה**
6,8	**28**	$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$	**שטח מרובע שאלכסוניו מאונכים**
25,27,28	**29**	$S_{ABCD} = \frac{23 \cdot 19.774}{2} = 227.40$ **שטח המעוין 227.40 סמ"ר**	**הצבה וחישוב**
		מ.ש.ל ג	

4.

נסמן את הנתונים על הציור ונביא את ההוכחה לאחר מכן.



<u>נתונים</u>

1. $ABCD$ **טרפז,** $AB \| CD$

2. נקודה E **נמצאת על המשך הבסיס** DC

3. BE **משיק למעגל**

4. $\angle CDB = \angle ADB$

עבור ב'

5. $AB = 10$ **ס"מ**

6. $DC = 15$ **ס"מ**

צ"ל: א. $\Delta ABD \cong \Delta CBE$

ב. אורך המשיק BE

<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
נביט על משולשים ΔCBE **ו-** ΔABD **ונראה חפיפה ביניהם**			
3	7	BE **משיק למעגל**	**נתון**
7	8	$\angle EBC = \angle CDB = a$	**זווית בין משיק למיתר = לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני + סימון**
4	9	$\angle CDB = \angle ADB = a$	**נתון + הצבה**
8,9	10	$\angle EBC = \angle ADB = a$ **(ז)**	**כלל המעבר**
1	11	$AB \| CD$	**סימון**
11	12	$\angle ABD = \angle CDB$	**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**
12	13	**קשת** AD **שווה לקשת** BC	**על זוויות היקפיות שוות נשענות קשתות שוות**
13	14	$AD = BC$ **(צ)**	**על קשתות שוות נשענים מיתרים שווים**
14	15	$\angle ADC = 2a$	**סכום זוויות**

הסבר		טענה	נימוק
11,15	16	$\angle DAB = 180° - 2a$	זוויות חד צדדיות בין מקבילים משלימות ל- $180°$
11,12	17	ABCD טרפז	נתון
14,17	18	ABCD טרפז שווה שוקיים	השוקיים שוות זו זזו
15,18	19	$\angle BCD = \angle ADC = 2a$	זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים
2	20	נקודה E נמצאת על המשך הבסיס DC	נתון
19,20	21	(ז) $\angle BCE = 180° - 2a$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
10,14,21	22	$\Delta ABD \cong \Delta CBE$	משפט חפיפה שני זווית צלע זווית
		מ.ש.ל א	
5	23	AB= 10 ס"מ	נתון
22	24	$BC = AB = 10$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים
22	25	$\angle BEC = \angle BDA = a$	זוויות מתאימות במשולשים חופפים
7,25	26	$EC = BC = 10$	מול זוויות שוות - צלעות שוות ΔBCE
6	27	DC= 15 ס"מ	נתון
26,27	28	$ED = EC + CD = 25$	סכום קטעים, הצבה וחישוב
	29	$BE^2 = EC \cdot ED$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים משיק וחותך למעגל – אז המשיק בריבוע שווה למכפלת החותך בחלקו החיצוני
26,28,29	30	$BE = \sqrt{10 \cdot 25} = 15.81$ אורך BE 15.81 ס"מ	הצבה וחישוב
		מ.ש.ל. ב	

.5

א. יש לחשב את ההסתברות למאורע

"הוצאת 4 סוכריות בטעם לימון משקית אחת ללא החזרה"

ההסתברות בכל הוצאה - תהייה מספר סוכריות בטעם לימון שישנן בשקית,

מתוך מספר הסוכריות הכללי שנשארו בשקית (מרחב המדגם)

סימון: $\mathrm{P_{Ln}}$ **- הוצאת סוכריה בטעם לימון בהוצאה ה-** n**-ית.**

לכן ההסתברות הנדרשת היא: $\mathrm{P(4\,lemon) = P_{L1}\cdot P_{L2}\cdot P_{L3}\cdot P_{L4}}$

כל הסתברות מותנית בהוצאה הקודמת, לכן:

$$\mathrm{P(4\,lemon) = P_{L1}\cdot(P_{L2}/P_{L1})\cdot(P_{L3}/(P_{L1}\cap P_{L2})\cdot(P_{L4}/(P_{L1}\cap P_{L2}\cap P_{L3})}$$

מכיוון ובכל הוצאה לא החזרנו את הסוכריה,

הרי שמספר הסוכריות הכללי יורד באחד וכן מספר סוכריות הלימון:

$$\mathrm{P(4\,lemon)} = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{210}$$

תשובה: ההסתברות להוצאת 4 סוכריות בטעם לימון ללא החזרה היא $\frac{1}{210}$

ב. יש לחשב את ההסתברות למאורע

" הוצאת 4 סוכריות בטעם לימון מ- 4 שקיות שונות"

יש כאן התפלגות בינומית $p = \frac{4}{10} = 0.4$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P_n(k) = \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

כאשר $p = 0.4 \quad k = 4 \quad n = 4$**, לכן,**

$$P_4(4) = \binom{4}{4}(0.4)^4(1-0.4)^{4-4}$$

$$P(4) = \frac{4!}{4!(4-4)!}(0.4)^4(0.6)^0$$

$$P(4) = 1\cdot(0.4)^4\cdot 1 = 0.4^4$$

$$P(4) = 0.0256$$

ההסתברות להוצאת 4 סוכריות בטעם לימון מ- 4 שקיות שונות 0.0256

תשובה: כן, $0.0256 > \frac{1}{210}$

ג. יש לחשב את ההסברות למאורע

"ההסתברות להוצאת 4 סוכריות בטעם לימון מ- 4 שקיות שונות,

כאשר ידוע שרוב הסוכריות שהוצאו הן בטעם לימון"

זו הסתברות מותנית: $P(4\,Lemon/(P(3\,Lemon)\cup P(4\,Lemon))$

נחשב תחילה את ההסתברות להוצאת 3 **סוכריות בטעם לימון**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי כאשר $p=0.4 \quad k=3 \quad n=4$**, לכן,**

$$P_4(3)=\binom{4}{3}(0.4)^3(1-0.4)^{4-3}$$

$$P(3)=\frac{4!}{3!(4-3)!}(0.4)^3(0.6)^1$$

$$P(3)=4\cdot(0.4)^3\cdot 0.6$$

$$P(3)=0.1536$$

המאורעות "הוצאת 3 **סוכריות בטעם לימון" ו- "הוצאת 4 סוכריות בטעם לימון"**

הם מאורעות זרים ולכן:

$$P(3\ Lemon)\cup P(4\ Lemon)=P(3\ Lemon)+P(4\ Lemon)$$
$$P(3\ Lemon)\cup P(4\ Lemon)=0.1536+0.0256=0.1792$$

ובהתאם:

$$P(4\ Lemon/(P(3\ Lemon)\cup P(4\ Lemon))=$$
$$\frac{P(4\ Lemon\cap(P(3\ Lemon)\cup P(4\ Lemon))}{(P(3\ Lemon)\cup P(4\ Lemon))}$$

$$P(4\ Lemon/(P(3\ Lemon)\cup P(4\ Lemon))=\frac{0.0256}{0.1792}=\frac{1}{7}$$

תשובה: ההסתברות ל"הוצאת 4 **סוכריות בטעם לימון מ-** 4 **שקיות שונות,**
כאשר ידוע שרוב הסוכריות שהוצאו הן בטעם לימון" היא $\frac{1}{7}$

6.

נגדיר את הקבוצות המתאימות: S - קבוצת הנסקרים

A - קבוצת המטופלים בחברה א', $\overline{A}$ - קבוצת המטופלים בחברה ב'

B - קבוצת המרזים, $\overline{B}$ - קבוצת הלא מרזים C - קבוצת הנשים, $\overline{C}$ - קבוצת הגברים

נבנה טבלה ראשית המאחדת את שני המיגדרים וטבלה נפרדת לכל מיגדר (מין),

המיגדר הוא גורם אפשרי, בסקר הבודק את היעילות של ההרזיה בחברות השונות.

<u>טבלה ראשית</u>

	A - חברה א'	$\overline{A}$ - חברה ב'	
B - מרזים	320	380	700
$\overline{B}$ - לא מרזים	280	220	500
	600	600	1200

<u>טבלה משנה – בקרב נשים</u> (נטרול המין כגורם מתווך אפשרי)

	A - חברה א'	$\overline{A}$ - חברה ב'	
B - מרזים	170	20	190
$\overline{B}$ - לא מרזים	230	40	270
	400	60	460

<u>טבלה משנה – בקרב גברים</u> (נטרול המין גורם מתווך אפשרי)

	A - חברה א'	$\overline{A}$ - חברה ב'	
B - מרזים	150	360	510
$\overline{B}$ - לא מרזים	50	180	230
	200	540	740

א. נבדוק את טענות שתי החברות

<u>בדיקת טענת חברה א'</u>, באמצעות טבלאות המשנה:

חברה א'		חברה ב'
$P(B/A)=\dfrac{N(B\cap A)}{N(A)}=\dfrac{170}{400}=0.425$	>	$P(B/A)=\dfrac{N(B\cap A)}{N(A)}=\dfrac{20}{60}=0.333$
$P(B/\overline{A})=\dfrac{N(B\cap \overline{A})}{N(\overline{A})}=\dfrac{150}{200}=0.75$	>	$P(B/\overline{A})=\dfrac{N(B\cap \overline{A})}{N(\overline{A})}=\dfrac{360}{540}=0.66$

הן בקרב הנשים, והן בקרב הגברים – שיעור המרזים גבוה יותר בחברה א'

<u>בדיקת טענת חברה ב'</u> באמצעות הטבלה הראשית:

חברה ב'		חברה א'
$P(B/A)=\frac{N(B\cap A)}{N(A)}=\frac{380}{600}=0.633$	$>$	$P(B/A)=\frac{N(B\cap A)}{N(A)}=\frac{320}{600}=0.533$

מבין כלל נוטלי כדורי ההרזיה, ללא קשר למין, שיעור המרזים בחברה ב' גבוה יותר.

ב. (1) נבדוק באמצעות טבלאות המשנה

שיעור המרזות בקרב הנשים: $P(B)=\frac{N(B)}{N(C)}=\frac{190}{460}=0.413$

שיעור המרזים בקרב הגברים: $P(B)=\frac{N(B)}{N(\bar{C})}=\frac{510}{740}=0.689$

לכן לגברים יש נטייה גבוהה יותר לרזות (לא בהכרח יש קשר סיבתי)

(2) ניתן לראות שבנתוני הסקר התקיים היפוך קשר (הפרדוקס של סימפסון)

בסעיף ב. (1) הראינו שלגברים יש נטייה יותר גבוהה לרזות.

נטייה זו הפכה להיות משמעותית, כאשר איחדנו את הטבלאות (והצמדנו גורמים),

עקב השיעור הגבוה יותר של גברים בין משתתפי הסקר בחברה ב' מאשר בחברה א':

חברה ב'		חברה א'
$P(\bar{C})=\frac{N(\bar{C})}{N(A)}=\frac{540}{600}=0.9$	$>$	$P(\bar{C})=\frac{N(\bar{C})}{N(A)}=\frac{200}{600}=0.333$

עקב ההבדל <u>המשמעותי</u> בשיעורי הגברים בחברה ב' לעומת חברה א',

ובתוספת לנטייתם לרזות – התקבל היפוך קשר.