1.

נתונות שתי הפונקציות:

$f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$ $g(x)=\frac{5}{x^2-1}$ **, כאשר** $x\neq\pm1$

א. יש למצוא לאילו ערכי x **מתקיים** $f(x)>g(x)$

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}>\frac{5}{x^2-1}$$

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{5}{x^2-1}>0$$

$$\frac{2(x+1)-1(x-1)-5}{x^2-1}>0$$

$$\frac{2x+2-x+1-5}{x^2-1}>0$$

$$\frac{x-2}{x^2-1}>0 \quad /\cdot(x^2-1)^2>0$$

$$(x-2)(x^2-1)>0$$

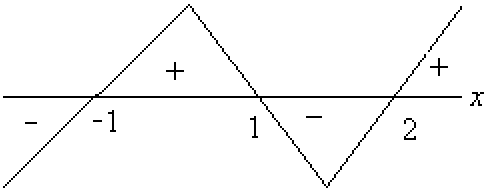
ה- x **שמאפסים את המכפלה הם:** $2,\pm1$

נפתור את אי-השוויון ב"שיטת הנחש"

נבדוק את ערך אגף שמאל, עבור $x=-3$

$$(-3-2)((-3)^2-1)=-40<0$$

אין שני אפסים שמתלכדים ולכן הביטוי יחליף סימן בכל אפס



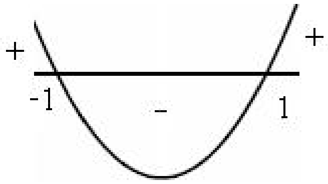
תשובה: $x>2$ **או** $-1<x<1$

ב. (1) יש לבדוק מתי ערכי $g(x)$ חיוביים

$$\frac{5}{x^2-1} > 0$$

מונה הביטוי חיובי ולכן נדרש מכנה חיובי

גרף המכנה הוא פרבולה בעלת מינימום



תשובה: $x>1$ **או** $x<-1$

(2) יש למצוא מתי הגרף של $f(x)$ מעל הגרף של $g(x)$

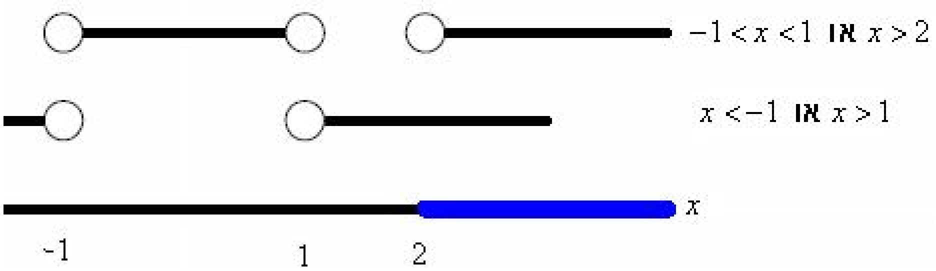
כאשר שניהם מעל ציר ה- x .

בסעיף ב(1) מצאנו כי עבור $x>1$ או $x<-1$ $g(x)$ חיובית

בסעיף א' מצאנו כי עבור $x>2$ או $-1<x<1$ $f(x)$ מעל $g(x)$

לכן: התחום המשותף יהיה התחום בו שתיהן חיוביות (מעל ציר ה- x),

וגם $f(x)$ מעל $g(x)$



תשובה: $x>2$

.2

א. נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \ \ldots \ a_n, \ \ldots \ a_{2n}$ **, עם הפרש** d

סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא אפס.

נראה שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים היא חשבונית.

$$a_{n+2}-a_n=a_n+2d-a_n=2d$$

לכן זו סדרה חשבונית, (וכנ"ל סדרת האיברים במקומות הזוגיים)

שבה: האיבר הראשון a_1 **, ההפרש** $2d$ **ומספר האיברים** n

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית: $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+d(n-1))$

$$\frac{n}{2}(2a_1+2d(n-1))=0 \quad / :\frac{n}{2}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a_1+2d(n-1)=0 \quad / :2$$

$$\Leftrightarrow a_1+d(n-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_n=0}$$

הוכחנו.

ב. נראה שההפרש בין סדרת האיברים במקומות הזוגיים

לסדרת האיברים במקומות הזוגיים – בסדרה חשבונית, הוא nd

שבה: האיבר הראשון $a_2=a_1+d$ **, ההפרש** $2d$ **ומספר האיברים** n

$$n\ lines\left\{\begin{array}{l} a_2-a_1=d \\ a_4-a_3=d \\ a_6-a_5=d \\ . \\ . \\ . \\ a_{2n}-a_{2n-1}=d \end{array}\right.$$

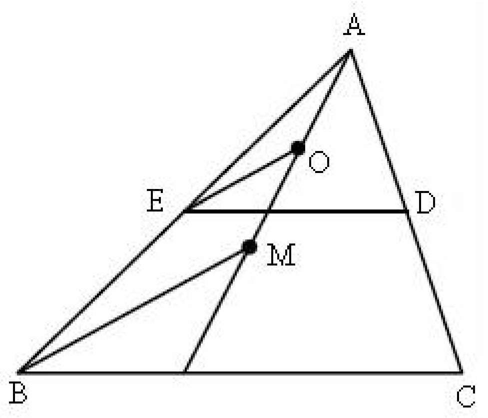
$$S_{\mathrm{EVEN}}-S_{\mathrm{ODD}}=nd$$

מכיוון וסכום סדרת האיברים במקומות האי-זוגיים הוא אפס

הרי שסכום סדרת האיברים במקומות הזוגיים הוא nd

תשובה: nd

3.



נתונים

1. ED הוא קטע אמצעים במשולש ABC
2. O הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש AED
3. M הוא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC

צ"ל:

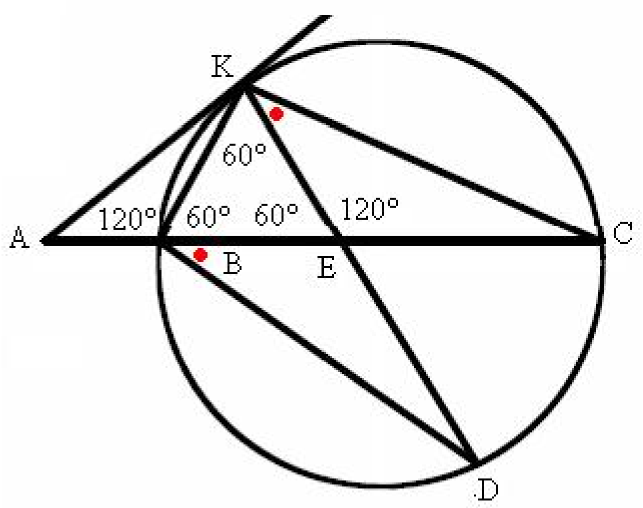
א. $\Delta AOE \sim \Delta AMB$

ב. $\frac{AO}{AM}$

הוכחה

הסבר		טענה	נימוק
1	4	ED קטע אמצעים ב- ΔABC	נתון
2	5	O מרכז המעגל החוסם ΔAED	נתון
5	6	$OA = OE$	רדיוסים שווים במעגל
7	7	$\sphericalangle OAE = \sphericalangle OEA$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔAOE
3	9	M מרכז המעגל החוסם ΔABC	נתון
9	10	$MA = MB$	רדיוסים שווים במעגל
10	11	$\sphericalangle OAE = \sphericalangle OEA$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔAMB
7, 11	12	$\sphericalangle MBA = \sphericalangle OEA$	כלל המעבר
	13	$\sphericalangle OAE = \sphericalangle MAB$	זוויות משותפת
12, 13	14	$\Delta AOE \sim \Delta AMB$	משפט דמיון זוויות זווית
מ.ש.ל. א			
4	15	$\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$	קטע אמצעים חוצה צלעות
14	16	$\frac{AO}{AM} = \frac{AE}{AB}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
15, 16	15	$\frac{AO}{AM} = \frac{1}{2}$	כלל המעבר
מ.ש.ל. ב			

.4



<u>נתונים</u>

1. KA **משיק למעגל**
2. $\measuredangle ABK = 120°$
3. $BK = BE$

צ"ל:

א. $\Delta KEC \cong \Delta BED$

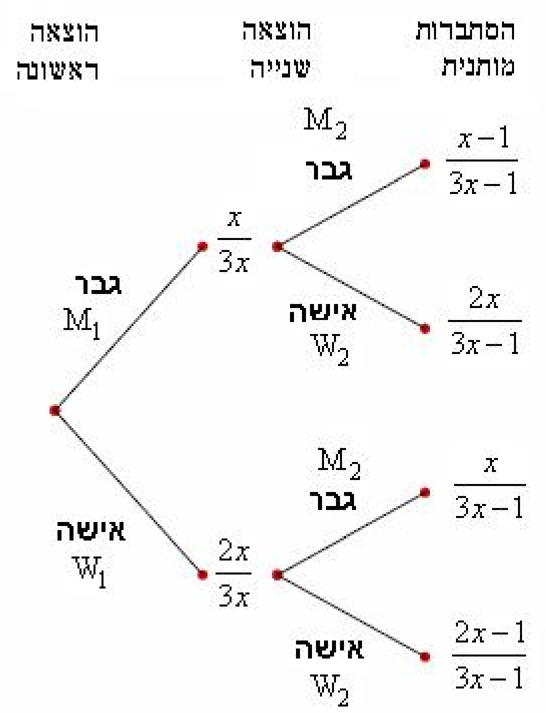
ב. $KE^2 = AB \cdot EC$

הסבר		טענה	נימוק
נביט על ΔBED ו- ΔKEC ונראה שהם חופפים			
2	4	$\measuredangle ABK = 120°$	**נתון**
3	5	$BK = BE$	**נתון**
5	6	$\measuredangle KEB = \measuredangle EKB$	**מול צלעות שוות מונחות צלעות שוות ב-** ΔKBE
4,6	7	$\measuredangle KEB = \measuredangle EKB = 60°$	**זווית חיצונית שווה לסכום שתי הזויות הפנימיות שלא צמודות לה**
4	8	$\measuredangle KBE = 60°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
7,8	9	$KB = BE = EK$	**כל הזוויות שוות ל-** $60°$**, לכן** ΔKBE **שווה צלעות**
7	10	$\measuredangle CKD = \measuredangle CBD$ **(ז)**	**זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת** $\overset{\frown}{CD}$ **שוות זו לזו**
9	11	$EK = BE$	**הוכח**
	12	$\measuredangle CEK = \measuredangle BED$	**זוויות קדקודיות שוות זו לזו**

הסבר		טענה	נימוק
10,11,12	13	$\Delta KEC \cong \Delta BED$	משפט חפיפה שני (ז. צ. ז.)
מ.ש.ל. א			
נביט על ΔABK ו- ΔKEC ונראה שהם דומים			
7	14	$\measuredangle KEC = 120^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
4,14	15	$\measuredangle KEC = \measuredangle ABK$	כלל המעבר
1	16	KA משיק למעגל	נתון
16	17	$\measuredangle KCE = \measuredangle BKA$	זוויות בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
15,17	18	$\Delta KEC \sim \Delta ABK$	משפט דמיון שני (ז. ז.)
18	19	$\frac{KE}{AB} = \frac{KC}{AK} = \frac{EC}{BK}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
19	20	$KE \cdot BK = AB \cdot EC$	חישוב
9,20	21	$KE^2 = AB \cdot EC$	הצבה
מ.ש.ל. ב			

.5

נציג הנתונים על עץ אפשרויות



א. נגדיר את המאורעות המתאימים:

W_1 - הוצאת אישה בפעם הראשונה

W_2 - הוצאת אישה בפעם השנייה

M_1 - הוצאת גבר בפעם הראשונה

M_2 - הוצאת גבר בפעם השנייה

ידוע שההסתברות לבחור במשחק זה שני אנשים

שאחד מהם גבר והאחר אישה, היא $\frac{1}{2}$

$$P((M_1\cap W_2)\cup(W_1\cap M_2))=P(M_1)\cdot P(W_2/M_1)+P(W_1)\cdot P(M_2/W_1)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}}\cdot\frac{2x}{3x-1}+\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}\cdot\frac{x}{3x-1}\quad /\cdot 6(3x-1)$$

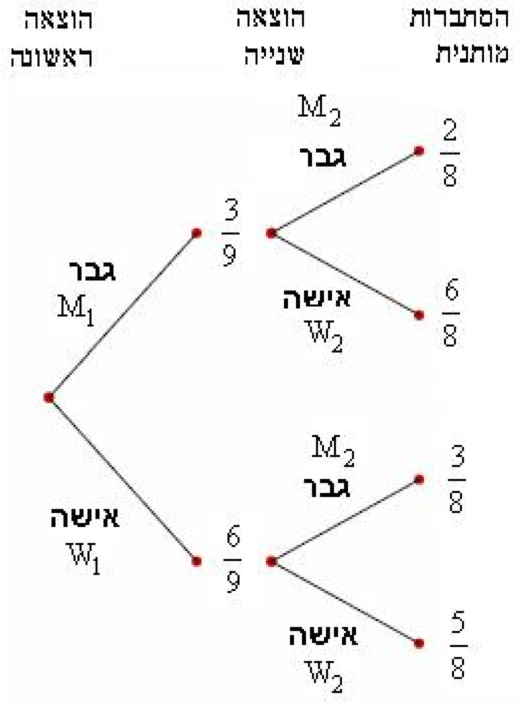
$$3(3x-1)=4x+4x$$

$$9x-3=8x$$

$$\boxed{x=3}$$

תשובה: $x=3$

ב. נעדכן את עץ ההסתברויות



ידוע שהאדם השני שנבחר היה אישה, ויש למצוא את ההסתברות שהאדם הראשון שנבחר היה אישה, כלומר את: $P(W_1/W_2)$

$$P(W_1/W_2)=\frac{P(W_1\cap W_2)}{P(W_2)}$$

$$P(W_2)=P(W_1\cap W_2)+P(M_1\cap W_2)$$

$$P(W_1\cap W_2)=P(W_1)\cdot P(W_2/W_2)=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$$

$$P(M_1\cap W_2)=P(M_1)\cdot P(W_2/W_2)=\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=0.25$$

$$P(W_2)=\frac{5}{12}+0.25=\frac{2}{3}$$

$$P(W_1/W_2)=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=0.625$$

תשובה: 0.625

ג. יש למצוא מה ההסתברות שבדיוק שלוש פעמים, מתוך חמישה משחקים, תיבחרנה שתי נשים בדיוק.

יש כאן התפלגות בינומית : על פי סעיף ב'

הסתברות להוצאת שתי נשים במשחק אחד - $P(W_1 \cap W_2) = \frac{5}{12}$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P(k) = \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

כאשר $p = \frac{5}{12}$ $k = 3$ $n = 5$, לכן,

$$P_5(3) = \binom{5}{3}(\frac{5}{12})^3(1-\frac{5}{12})^{5-3}$$

$$P_5(3) = \frac{5!}{5!(5-3)!}(\frac{5}{12})^3(\frac{7}{12})^2$$

$$P_5(3) = 10 \cdot (\frac{5}{12})^3(\frac{7}{12})^2$$

$$P_5(3) = 0.2462$$

תשובה: 0.2462

.6

נגדיר את הקבוצות הבאות:

S **- קבוצת הנבדקים במכשיר**

A **- קבוצת נושאי המתכות**

$\overline{A}$ **- קבוצת אלו** ***שלא*** **נושאי מתכות**

B **- קבוצת המזוהים כנושאי מתכות**

$\overline{B}$ **- קבוצת ה*לא* מזוהים כנושאי מתכות**

נתונים ומשמעויות

$$P(A/B) = 0.95 \quad \rightarrow P(\overline{A}/B) = 0.05$$

$$P(A/\overline{B}) = 0.01 \quad \rightarrow P(\overline{A}/\overline{B}) = 0.99$$

$$P(B) = 0.1 \quad \rightarrow P(\overline{B}) = 0.9$$

פיתוח נוסחאות פרופורציה מותנית

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.95 = \frac{P(A \cap B)}{0.1}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0.095}$$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$0.01 = \frac{P(A \cap \overline{B})}{0.9}$$

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = 0.009}$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים

	A **נושאי מתכות**	$\overline{A}$ ***לא* נושאים**	
B **- מזוהים**	0.095	0.005	0.1
$\overline{B}$ **- *לא* מזוהים**	0.009	0.891	0.9
	0.104	0.896	1

א. טענה: המכשיר מזהה נכון מעל 95% **מבין אלה שאכן נושאים מתכות**

כלומר: $P(B/A) > 95\%$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{0.095}{0.104}$$

$$\boxed{P(B/A) = 91.346\%}$$

תשובה: הטענה *לא* נכונה

ב. טענה: מבין האנשים שאינם נושאי מתכות יש פחות מ 1% **שהמכשיר מזהה אותם כנושאי מתכות**

כלומר: $P(B/\overline{A}) < 1\%$

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$P(B/\overline{A}) = \frac{0.005}{0.896}$$

$$\boxed{P(B/\overline{A}) = 0.5803\%}$$

תשובה: הטענה נכונה

ג. טענה: המכשיר מזהה נכון מעל 95% **מבין אלה שאכן נושאים מתכות**

כלומר: $P(\overline{B}/A) < 10\%$

$$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)}$$

$$P(\overline{B}/A) = \frac{0.009}{0.104}$$

$$\boxed{P(\overline{B}/A) = 8.653\%}$$

תשובה: הטענה נכונה