.1

נתונה הפרבולה $y^2=2px$ **,** $p>2$ **.**

מוקד הפרבולה הוא $M(\frac{p}{2},0)$

$p>2$ **ולכן** $\frac{p}{2}>1$ **והמוקד מימין לישר** $x=1$

הישר $x=1$ **חותך את הפרבולה בנקודות** A **ו-** B

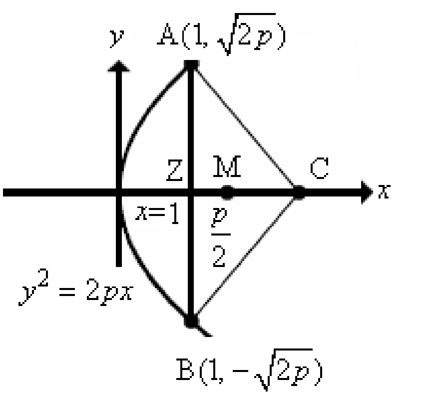
$$x=1$$
$$y^2=2p\cdot 1$$
$$y=\pm\sqrt{2p}$$

ובהתאם: $B(1,-\sqrt{2p})$ $A(1,\sqrt{2p})$

א. מפגש התיכונים במשולש ABC **הוא מוקד הפרבולה: ניעזר בנוסחה:** $M(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

$$\frac{p}{2}=\frac{1+1+x_C}{3}$$
$$1.5p=2+x_C$$
$$x_C=1.5p-2$$

מכיוון ו- $p>2$ **הרי ש-** C **מימין למוקד .**



יש למצוא את שטח המשולש ABC **: מכיוון ו-** ZC **מאונך ל-** AB **: השטח:** $\frac{AB\cdot ZC}{2}$

$$ZC=1.5p-2-1=1.5p-3$$
$$AB=2\sqrt{2p}$$
$$S=\frac{2\sqrt{2p}}{2}(1.5p-3)$$
$$\boxed{S=(1.5p-3)\sqrt{2p}}$$

תשובה: $S=(1.5p-3)\sqrt{2p}$

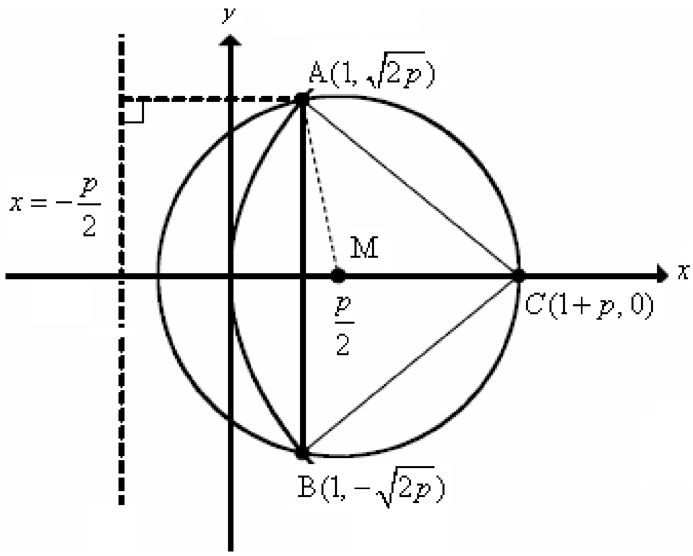
ב. מוקד הפרבולה הוא מרכז המעגל החוסם את משולש ABC
ולכן נמצא במרחק שווה משלושת הקדקודים.

כל נקודה על הפרבולה נמצאת במרחק שווה מהמדריך $x=-\frac{p}{2}$ **ומהמוקד.**

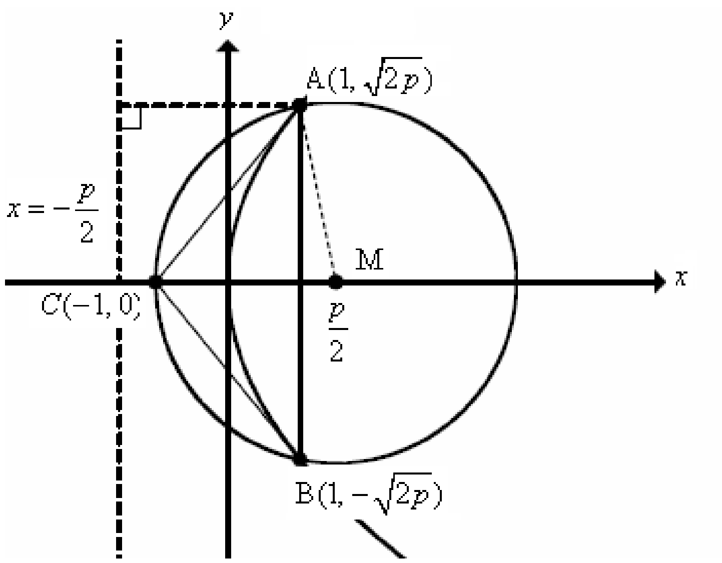
מרחק A **מהמדריך הוא** $1+\frac{p}{2}$ **ולכן זהו מרחקה מהמוקד.**

לכן, גם מרחק C **מהמוקד שווה ל-** $1+\frac{p}{2}$ **ובהתאם:** $\left|x_C-\frac{p}{2}\right|=1+\frac{p}{2}$

$$x_C-\frac{p}{2}=1+\frac{p}{2}\quad\to x_C=1+p\quad\to C(1+p,0)$$



$$x_C-\frac{p}{2}=-1-\frac{p}{2}\quad\to x_C=-1+p\quad\to C(-1,0)$$



תשובה: $C(p+1,0)$ **,** $C(-1,0)$

נכתב ע"י עפר ילין

.2

יש להוכיח כי $\vec{AK} \perp \vec{GE}$ **כלומר** $\vec{AK} \cdot \vec{GE} = 0$ **.**

על צלעות המשולש ABC **בנו שני ריבועים:** $ACDE$ **ו-** $ABFG$**.**

צלעות הריבוע שוות באורכיהן, לכן: $|\underline{b}| = |\underline{u}|$ **וגם** $|\underline{a}| = |\underline{v}|$

ומאונכות זו לזו, לכן:

$$\vec{AE} \perp \vec{AC} \quad \rightarrow \quad \underline{a} \cdot \underline{v} = 0$$
$$AE = AC \quad \rightarrow \quad |\underline{a}| \cdot |\underline{v}| = 0$$
$$\vec{AG} \perp \vec{AB} \quad \rightarrow \quad \underline{b} \cdot \underline{u} = 0$$
$$AG = AB \quad \rightarrow \quad |\underline{b}| \cdot |\underline{u}| = 0$$

$\vec{AK}$ **הוא תיכון לצלע** BC **, לכן:**

$$\boxed{\vec{AK} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}}$$

$$\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{AE}$$
$$\boxed{\vec{GE} = -\underline{b} + \underline{a}}$$

נבדוק את המכפלה המבוקשת:

$$\vec{AK} \cdot \vec{GE} = (\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}) \cdot (-\underline{b} + \underline{a})$$
$$\vec{AK} \cdot \vec{GE} = \frac{1}{2}\underline{b}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{a}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{b}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{a}\underline{v}$$
$$\vec{AK} \cdot \vec{GE} = \frac{1}{2}(\underline{a}\underline{u} - \underline{b}\underline{v}) \quad \leftarrow \underline{a} \cdot \underline{v} = 0 \quad \underline{b} \cdot \underline{u} = 0$$

נשים לב ש: $\angle EAB = \angle GAC$ **(כ"א סכום של זווית ישרה וזווית משותפת)**

$$\underline{a}\underline{u} = |\underline{a}| \cdot |\underline{u}| \cos \angle EAB$$
$$\underline{b}\underline{v} = |\underline{b}| \cdot |\underline{v}| \cos \angle EAB$$

הראינו ש: $|\underline{b}| = |\underline{u}|$ **וגם** $|\underline{a}| = |\underline{v}|$ **ולכן:** $\underline{a}\underline{u} = \underline{b}\underline{v}$

מסקנה:

$$\vec{AK} \cdot \vec{GE} = \frac{1}{2}(0)$$
$$\vec{AK} \cdot \vec{GE} = 0$$

הוכח !!!

.3

ישר החיתוך שבין המישור p_1 למישור p_2 , עובר דרך

הנקודות $A(2,-1,2)$ **ו-** $B(0,3,-1)$ **.**

p_1 **עובר דרך ראשית הצירים ודרך שתי הנקודות הנתונות,**

ולכן ההצגה הפרמטרית שלו היא: $p_1 : (0,0,0) + t(0,3,-1) + s(2,-1,2)$

נמצא את משוואת המישור על ידי חישוב דטרמיננטה

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(6-1) - y(0-(-2)) + z(0-6) = 0$$

$$\boxed{p_1 : \quad 5x - 2y - 6z = 0}$$

המישור p_2 **עובר דרך הנקודה** $C(1,3,1)$ **והנקודות הנתונות:**

$$\vec{CB} = \underline{B} - \underline{C} = \underline{x} = (1,0,2)$$
$$\vec{CA} = \underline{A} - \underline{C} = \underline{x} = (1,-4,1)$$

ולכן ההצגה הפרמטרית שלו היא: $p_2 : (1,3,1) + p(1,0,2) + q(1,-4,1)$

נמצא את משוואת המישור על ידי חישוב דטרמיננטה

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(0-(-8)) - (y-3)(1-2) + (z-1)(-4-0) = 0$$

$$\boxed{p_2 : \quad 8x + y - 4z - 7 = 0}$$

$\mathbf{l}_1$ הוא ישר החיתוך בין המישור p_1 למישור yz , שמשוואתו $x=0$.

$$\begin{cases}5x-2y-6z=0\\ x=0\end{cases}$$

$$2y=-6z$$

$$y=-3z$$

$$z=t \quad \to y=-3t$$

ונקודה טיפוסית על $\boxed{\mathbf{l}_1 : \underline{x}=t(0,-3,1)}$ היא $(0,-3t,t)$

$\mathbf{l}_2$ הוא ישר החיתוך בין המישור p_2 למישור xy, שמשוואתו $z=0$.

$$\begin{cases}8x+y-4z-7=0\\ z=0\end{cases}$$

$$8x+y=7$$

$$y=7-8x$$

$$x=s \quad \to y=7-8s$$

ונקודה טיפוסית על $\boxed{\mathbf{l}_2 : \underline{x}=(0,7,0)+s(1,-8,0)}$ היא $(s,7-8s,0)$

יש למצוא את המצב ההדדי בין הישרים $\mathbf{l}_1$ ו- $\mathbf{l}_2$

לא ניתן למצוא סקלר a כך ש: $(1,-8,0)=a(0,-3,1)$

ולכן הישרים לא מקבילים, או מתלכדים.

נבדוק האם הישרים נחתכים, או מצטלבים.

יש לבדוק האם יש פתרון למערכת המשוואות:

$$\begin{cases}s=0\\ 7-8s=-3t\\ 0=t\end{cases}$$

נקבל: $7-0\neq 0$ ולכן אין נקודות חיתוך

תשובה: הישרים מצטלבים

4. א

נתון המספר המרוכב $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

יש להוכיח כי z **מקיים את המשוואה** $z^{3n}+z^{3m+1}+z^{3k+2}=0$

נעבור להצגה קוטבית של $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z|=\left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{|z|=1}$$

$$\tan q=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{q=240^\circ} \quad \leftarrow 180<q<270^\circ$$

ובהתאם למסגרות: $\boxed{z=cis\ 240^\circ}$

נציב במשוואה הנתונה: $(cis\ 240^\circ)^{3n}+(cis\ 240^\circ)^{3m+1}+(cis\ 240^\circ)^{3k+2}=0$

, לכן: $a^{x+y}=a^x a^y$,

$$(cis\ 240^\circ)^{3n}+cis\ 240^\circ(cis\ 240^\circ)^{3m}+(cis\ 240^\circ)^2(cis\ 240^\circ)^{3k}=0$$

נשתמש בנוסחת דה-מואבר: $(cisq)^n=cis(nq)$ **, כאשר** $a^{xy}=(a^x)^y$

$$(cis\ 720^\circ)^n+cis\ 240^\circ(cis\ 720^\circ)^m+(cis\ 480^\circ)(cis720^\circ)^k=0$$

נציב: $cis(720^\circ)=cis0^\circ=1$,

$$cis240^\circ=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ cis(480^\circ)=cis120^\circ=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1^n+(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(1)^m+(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(1)^k=0$$

$$1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$0=0$$

הוכח !!!

4. ב

יש לפתור את המשוואה $(x^2-2x+1)^{x^2-9}=1$

<u>נבדוק את תחום ההגדרה</u>

$x^2-2x+1>0$

$(x-1)^2>0$

זה ביטוי אי-שלילי ולכן תחום ההגדרה: $x\neq 1$

<u>נבדוק את האפשרות שהבסיס שווה ל-</u> 1

שכן, במקרה זה נקבל פסוק אמת $1=1$

$x^2-2x+1=1$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\boxed{x_1=0}, \quad \boxed{x_2=2}$

<u>נבדוק את האפשרות שמעריך שווה ל-</u> 0

שכן, גם במקרה זה נקבל פסוק אמת $1=1$

$x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

$\boxed{x_3=-3}, \quad \boxed{x_4=3}$

תשובה: $x_1=0, \quad x_2=2, \quad x_3=-3, \quad x_4=3$

.5

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln(x^2-2x+a)$

תחום ההגדרה: $x^2-2x+a>0$

זו פרבולה בעלת מינימום, לכן נדרש דיסקרימיננטה שלילית:

$$\Delta=b^2-4ac<0$$
$$2^2-4a<0$$
$$4<4a$$
$$\boxed{a>1}$$

תשובה: $a>1$

ב. נדרש ששיעור ה- y **בנקודת הקיצון יהיה אפס**

נמצא את נגזרת הפונקציה:

$$\boxed{f(x)=\ln(x^2-2x+a)}$$
$$f'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+a}$$
$$\boxed{f'(x)=2\cdot\frac{x-1}{(x^2-2x+a)^2}}$$

בנקודה $x=1$ **עוברת הנגזרת משליליות לחיוביות**

ולכן הפונקציה עוברת מירידה לעליה וזו נקודת מינימום

נשווה את שיעור ה- y **בנקודת הקיצון לאפס**

$$f(1)=\ln(1^2-2\cdot1x+a)$$
$$f(1)=\ln(a-1)$$
$$\ln(a-1)=0$$
$$a-1=e^0$$
$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$

מכאן שהפונקציה היא $\boxed{f(x)=\ln(x^2-2x+2)}$

עבור $a=2$ קבלנו את $\boxed{f(x)=\ln(x^2-2x+2)}$

ג. נמצא את נגזרות הפונקציה, מחדש.

$$\boxed{f(x)=\ln(x^2-2x+2)}$$
$$f'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$
$$\boxed{f'(x)=2\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+2}}$$
$$f''(x)=2\cdot\frac{x^2-2x+2-(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$
$$f''(x)=2\cdot\frac{x^2-2x+2-2x^2+2x+2x-2}{(x^2-2x+2)^2}$$
$$\boxed{f''(x)=2\cdot\frac{-x^2+2x}{(x^2-2x+2)^2}}$$
$$f''(x)=0 \quad \to -x^2+2x=0 \quad \to x(-x+2)=0$$
$$x=0 \quad x=2$$

נמצא את תחומי קמירות/ קעירות בעזרת טבלה,

(מכנה הנגזרת השנייה חיובי)

$$f''(-1)=-(-1)^2+2\cdot(-1)<0$$
$$f''(1)=-1^2+2\cdot1>0$$
$$f''(3)=-3^2+2\cdot3<0$$

x	3	2	1	0	-1
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
מסקנה	$\cap$	**פיתול**	$\cup$	**פיתול**	$\cap$

תשובה: קעורה כלפי מעלה $\cup$ **:** $0<x<2$

קעורה כלפי מטה $\cap$ **:** $x>2$ **או** $x<0$

ד. (1) פונקצית הנגזרת הראשונה עולה, כאשר פונקצית הנגזרת השנייה חיובית

פונקצית הנגזרת הראשונה עולה, כאשר $0<x<2$

פונקצית הנגזרת הראשונה יורדת, כאשר $x>2$ **או** $x<0$

(2) בהתאם לתחומי העלייה והירידה של פונקצית הנגזרת הראשונה

$x=2$ **מקסימום**

$x=0$ **מינימום**