נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$

א. נבדוק תחילה את תחום ההגדרה.

הדיסקרימיננטה של המכנה שלילית, לכן המכנה אינו מתאפס והפונקציה מוגדרת לכל x **.**

מכיוון וגרף המכנה הוא פרבולה בעלת מינימום, הרי שהיא מרחפת וחיובית לכל x **.**

לכן הפונקציה שלילית, כאשר $x+1<0$ **, כלומר כאשר** $x<-1$

תשובה: $x<-1$

ב. נתון הישר $y=m \quad , \quad m\neq 0$ **.**

(1) יש למצוא מתי הוא חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות.

$$\frac{x+1}{2x^2+x+1}=m$$

$$x+1=2mx^2+mx+m$$

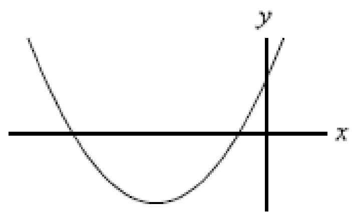
$$\boxed{2mx^2+(m-1)x+m-1=0}$$

יש למצוא עבור אילו ערכי m **קיימות שתי נקודות חיתוך.**

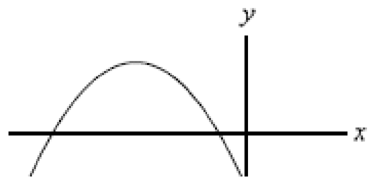
$$a=2m \quad b=m-1 \quad c=m-1$$

<u>מקרה הפרבולה (גרף של פונקציה ממעלה שנייה)</u>

נדרש גרף של פרבולה, כדוגמת:



או



התנאים הנדרשים הם: $\Delta>0$ **(שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-**x **)**

$a\neq 0$ **(גרף של פרבולה), כלומר כפי שנתון** $m\neq 0$

<u>$\Delta>0$</u>

$$\Delta=b^2-4ac>0$$

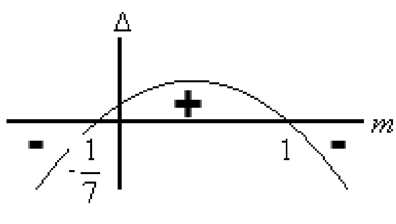
$$(m-1)^2-8m\cdot(m-1)>0$$

$$(m-1)\cdot 8m(m-1)>0$$

$$(m-1)(m-1-8m)>0$$

$$(m-1)(-1-7m)$$

$$m_1=1 \quad m_2=-\frac{1}{7}$$



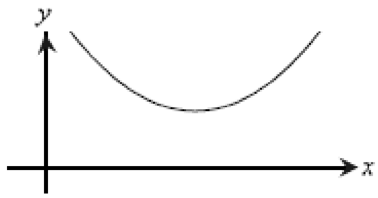
ולכן $-\dfrac{1}{7}<m<1$

והתשובה הסופית לשני התנאים: $-\dfrac{1}{7}<m<1$ **,** $m\neq 0$

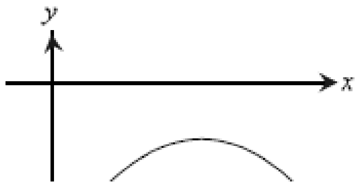
(2) יש למצוא עבור אילו ערכי m אין נקודות חיתוך.

<u>מקרה הפרבולה (גרף של פונקציה ממעלה שנייה)</u>

נדרש גרף של פרבולה, כדוגמת:



או



התנאים הנדרשים הם: $\Delta<0$ **(שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-**x**)**

$a\neq 0$ **(גרף של פרבולה), כלומר כפי שנתון** $m\neq 0$

ובהתאם לתרשים מסעיף א' - $m>1$ **או** $m<-\frac{1}{7}$ **וזו גם התשובה הסופית לסעיף.**

תשובה: $m>1$ **או** $m<-\frac{1}{7}$

א. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_{n+1} = -0.5a_n + 4.5 \end{cases}$$

הסדרה b_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי $b_n = a_n - 3$.

יש להוכיח כי הסדרה הנדסית, כאשר נראה כי המנה של $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ היא קבועה .

על פי הגדרת הסדרה b_n

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 3$$
$$b_{n+1} = -0.5a_n + 4.5 - 3$$
$$b_{n+1} = -0.5a_n + 1.5$$

ועתה נראה כי המנה קבועה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-0.5a_n + 1.5}{a_n - 3} = \frac{-0.5(a_n - 3)}{a_n - 3} = -0.5$$

לכן המנה בין שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב- n) והסדרה הנדסית.

הוכחנו.

מסקנות עבור הסעיף הבא: $q = -0.5$ **,**

$$b_1 = a_1 - 3 = 11 - 3 = 8$$
$$b_2 = b_1 q = 8(-0.5) = -4$$

ב.(1) יש למצוא את מנת הסדרה של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה b_n

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{b_n q^2}{b_n} = \frac{b_n(-0.5)^2}{b_n} = 0.25$$

לכן, סדרת האיברים במקומות הזוגיים היא הנדסית, מנה קבועה (לא תלויה ב- n)

תשובה: 0.25

(2) כיוון ש- $-1 < q < 1$ **הרי שהסדרה ההנדסית האינסופית מתכנסת וסכומה** $S = \frac{b_2}{1-q^2}$

נמצא את סכום כל איבריה:

$$S = \frac{-4}{1-0.25} = -5\frac{1}{3}$$

תשובה: סכום כל אינסוף האיברים במקומות הזוגיים מתכנס ל- $-5\frac{1}{3}$ **.**

<u>נתונים</u>

1. ACE **משולש שווה צלעות**

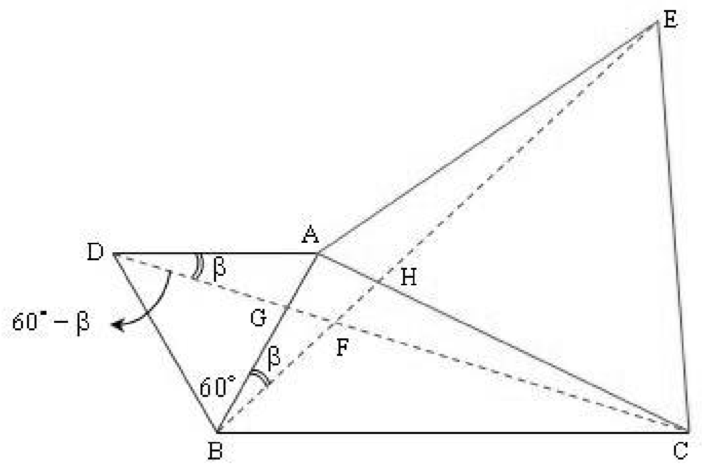
2. ABD **משולש שווה צלעות**

צ"ל:

א. BE = DC

ב. גודל הזווית GFB.

ג. גודל הזווית BAC, **עבורה המרובע** AHFG **בר חסימה**



הוכחה

הסבר		טענה	נימוק
נביט על ΔBAE ו- ΔDAC ונראה שהם חופפים			
1	3	משולש שווה צלעות ACE	נתון
3	4	$DA = AB$ (צ)	צלעות שוות במשולש שווה צלעות
3	5	$\sphericalangle DAB = 60^\circ$	זוויות שוות במשולש שווה צלעות
	6	$\sphericalangle GAH = \sphericalangle GAH$	זווית שווה לעצמה
2	7	משולש שווה צלעות ABD	נתון
7	8	$\sphericalangle EAC = 60^\circ$	זוויות שוות במשולש שווה צלעות
5,8	9	$\sphericalangle DAB = \sphericalangle EAC$	כלל המעבר
6,9	10	$\sphericalangle DAB + \sphericalangle GAH = \sphericalangle EAC + \sphericalangle GAH$	חיבור זוויות שוות לזוויות שוות
10	11	$\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAB$ (ז)	סכום זוויות
7	12	$AC = AE$ (צ)	צלעות שוות במשולש שווה צלעות
4,11,12	13	$\Delta DAC \cong \Delta BAE$	משפט חפיפה ראשון (צ.ז.צ.)
13	14	$\boxed{BE = DC}$	צ.מ.בח.
מ.ש.ל. א			
הסבר		טענה	נימוק
	15	$\sphericalangle ADG = b$	סימון
3	16	$\sphericalangle ADB = 60^\circ$	זוויות שוות במשולש שווה צלעות
15,16	17	$\sphericalangle GDB = 60^\circ - b$	הפרש זוויות
13	18	$\sphericalangle ABE = b$	ז.מ.ב.ח.
3	19	$\sphericalangle DBA = 60^\circ$	זוויות שוות במשולש שווה צלעות
18,19	20	$\sphericalangle DBH = 60^\circ + b$	סכום זוויות
17,20	21	$\boxed{\sphericalangle GFB = 60^\circ}$	סכום זוויות ב- ΔDFB הוא 180°
מ.ש.ל. ב			
13	22	$\sphericalangle GFH = 120^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
3	23	$\boxed{\sphericalangle BAC = 60^\circ}$	על מנת שמרובע $AHFG$ יהיה בר-חסימה, זוויות נגדיות משלימות ל- 180°
מ.ש.ל. ג			

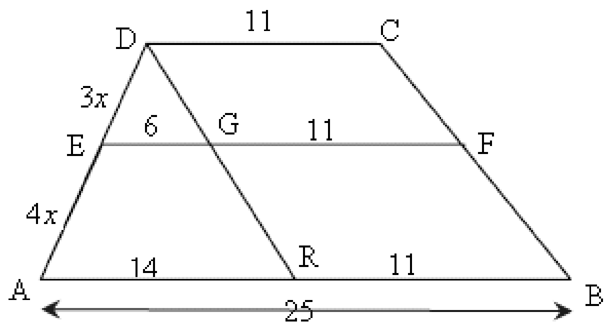
<u>נתונים</u>

1. ABCD **טרפז**
2. $EF \parallel AB$
3. AB = 25 **ס"מ**
4. DC = 11 **ס"מ**
5. $\frac{DE}{EA} = \frac{3}{4}$

צ"ל:

א. אורך EF

ב. היחס שבין שטח הטרפז EFCD **ובין שטח הטרפז** ABFE.



<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
נעביר קו עזר שיחלק הצורות למקביליות ולמשולשים			
	6	$DR \parallel BC$	בניית עזר
1	7	$ABCD$ טרפז	נתון
7	8	$AB \parallel CD$	בסיסי הטרפז מקבילים זה לזה
8	9	$RB \parallel BC$	חלקים מישרים מקבילים
6,9	10	$DCBR$ מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
2	11	$EF \parallel AB$	נתון
7	12	$DGFC$ מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
4	13	$DC = 11$ ס"מ	נתון
13, 12, 10	14	$RB = GF = 11$ ס"מ 11	צלעות נגדיות שוות במקבילית
3	15	$AB = 25$ ס"מ	נתון
15, 14	16	$AR = 14$ ס"מ	הפרש קטעים
5	17	$\frac{DE}{EA} = \frac{3}{4}$	נתון
הסבר		**טענה**	**נימוק**
11	18	$EG \parallel AR$	חלקים מישרים מקבילים
17,18	19	$\frac{EG}{AR} = \frac{DE}{DA} = \frac{DG}{DR}$	משפט תאלס מורחב
17,19	20	$\frac{EG}{14} = \frac{3}{7}$	הצבה וחישוב
20	21	$DC = 6$ ס"מ	חישוב
21, 14	22	$EF = 17$ ס"מ	סכום קטעים
מ. ש. ל. א			
19	23	$\Delta EDG \sim \Delta ADR$	משפט דמיון ראשון צ. צ. צ.
23, 17	24	$\frac{h_{\Delta EDG}}{h_{\Delta ADR}} = \frac{3}{7}$	יחסי גבהים במשולשים דומים
24	25	$\frac{h_{EFCD}}{h_{ABFE}} = \frac{3}{4}$	חישוב (ניתן גם ע"י משפט תאלס)
	26	$\frac{S_{EFCD}}{S_{ABFE}} = \frac{\frac{(DC+EF)h_{EFCD}}{2}}{\frac{(AB+EF)h_{ABFE}}{2}}$	נוסחת שטח טרפז: מכפלת חצי הגובה בסכום הבסיסים

נכתב ע"י עפר ילין

26, 25, 22, 15	28	$\frac{S_{EFCD}}{S_{ABFE}} = \frac{(11+17)}{(25+17)} \cdot \frac{3}{4}$	**הצבה**
28	29	$\boxed{\frac{S_{EFCD}}{S_{ABFE}} = 0.5}$	**חישוב**
מ. ש. ל. ב			

א. נציג את ההסתברויות לזכייה בשלושת המשחקים בטבלה:

ההסתברות לזכות ב- 15 **נקודות היא המאורע המשלים לזכייה ב-** 10 **או** 30 **נקודות,**

ולכן הסתברות זו שווה ל: $1-(0.2+P)=0.8-P$

משחק מס'	**זכייה ב- 10 נקודות**	**זכייה ב- 15 נקודות**	**זכייה ב- 30 נקודות**
1	P	$0.8-P$	0.2
2	P	$0.8-P$	0.2
3	P	$0.8-P$	0.2

על מנת לזכות ב- 25 **נקודות בדיוק בשני משחקים –**

יש לזכות באחד מהם ב- 10 **נקודות ובשני** ב- 15 **נקודות, כאשר אין חשיבות לסדר המשחקים.**

P(10 **בראשון** / 15 **בשני**) + P(15 **בראשון** / 10 **בשני**) = $P(10)\cdot P(15) + P(15)\cdot P(10) = 0.3$

$$(0.8-P)\cdot P + P\cdot(0.8-P) = 0.3$$
$$0.8P - P^2 + 0.8P - P^2 = 0.3$$
$$2P^2 - 1.6P + 0.3 = 0$$
$$P_{1,2} = \frac{1.6\pm 0.4}{4}$$
$$\boxed{P = 0.5} \quad \cancel{P = 0.3} \leftarrow P > 0.4$$

תשובה: $P = 0.5$

ב. נעדכן את הטבלה:

משחק מס'	**זכייה ב- 10 נקודות**	**זכייה ב- 15 נקודות**	**זכייה ב- 30 נקודות**
1	0.5	0.3	0.2
2	0.5	0.3	0.2
3	0.5	0.3	0.2

על מנת לזכות ב- 50 **נקודות בדיוק בשלושה משחקים רצופים –**

יש לזכות בשניים מהם ב- 10 **נקודות ובשלישי** ב- 30 **נקודות, כאשר אין חשיבות לסדר המשחקים.**

קיימים שלושה מאורעות כאלו, בעלי הסתברות שווה – נחשב אחד מהם.

P(10 **בראשון וגם בשני** / 30 **בשלישי**) = $P(10)\cdot P(10)\cdot P(30) = 0.5\cdot 0.5\cdot 0.2 = 0.05$

ולכן: $P((10,10,30)\cup(10,30,10)\cup(30,10,10)) = 3\cdot 0.05 = 0.15$

תשובה: 0.15

ג. יש למצוא מהי ההסתברות שבקבוצה אקראית של 5 **אנשים לכל היותר אחד מהם,**

יזכה ב- 50 **נקודות בדיוק בשלושה משחקים רצופים.**

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p = 0.15$ **,** $n = 5$

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P_n(k) = \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

את ההסתברות למאורע של: " 0**, או** 1 **אנשים יזכה** 50 **נקודות בדיוק בשלושה משחקים רצופים "**

1 **אנשים בדיוק**

$$P_5(1) = \binom{5}{1}(0.15)^1(1-0.15)^{5-1}$$

$$P_5(1) = \frac{5!}{1!(5-1)!}0.15^1 \cdot 0.85^4$$

$$P_5(1) = 5 \cdot 0.15 \cdot 0.85^4$$

$$P_5(1) = 0.75 \cdot 0.85^4$$

0 **אנשים בדיוק**

$$P_5(0) = \binom{5}{0}(0.15)^0(1-0.15)^{5-0}$$

$$P_5(0) = \frac{5!}{0!(5-0)!}0.15^0 \cdot 0.85^5$$

$$P_5(0) = 1 \cdot 1 \cdot 0.85^5$$

$$P_5(0) = 0.85^5$$

ובהתאם: $\mathrm{P}(1\,\text{at the most}) = 0.85^5 + 0.75 \cdot 0.85^4 = 0.83521$

תשובה: ההסתברות היא 0.83521 **.**

א. נגדיר את הקבוצות הבאות

S - **קבוצת המועמדים לתחרות שירה**

A - **קבוצת המועמדים שהתקבלו,** $\overline{A}$ - **קבוצת המועמדים שלא התקבלו**

B - **קבוצת המועמדים מערים,** $\overline{B}$ - **קבוצת המועמדים מיישובים אחרים**

C - **קבוצת המועמדים שלמדו פיתוח קול,** $\overline{C}$ - **קבוצת המועמדים שלא למדו פיתוח קול**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$N(B) = 1.5N(\overline{B}) \quad / : N(S)$$
$$P(B) = 1.5P(\overline{B})$$
$$1 - P(\overline{B}) = 1.5P(\overline{B}) \quad \leftarrow P(B) = 1 - P(\overline{B})$$
$$\boxed{P(\overline{B}) = 0.4} \quad \rightarrow \boxed{P(B) = 0.6}$$
$$P(\overline{A}/B) = 0.52 \quad \rightarrow P(A/B) = 0.48$$
$$P(A \cap \overline{B}) = 0.256$$

<u>פיתוח נוסחאות של הסתברות מותנית</u>

$$P(\overline{A} / B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$
$$0.52 = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{0.6}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = 0.312$$

<u>נשלים את הנתונים בטבלה:</u>

	$\overline{A}$	A	
0.6	0.312	0.288	B
0.4	0.144	0.256	$\overline{B}$
1	0.456	0.544	

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.288}{0.6} = 0.48$$

תשובה: פרופורציית המועמדים שהתקבלו לתחרות, מבין המועמדים מהערים היא 0.48

ב. נציג את הנתונים עליהם הסתמך העיתונאי

$$P(A/B)=0.48$$

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.256}{0.4}=0.64$$

כלומר $P(A/\overline{B})>P(A/B)$ **ומכאן טענת העיתונאי.**

ג. (1) נבדוק את טענת המארגנים

בקרב אלו שלא למדו פיתוח קול - $\overline{C}$	**בקרב אלו שלמדו פיתוח קול -** C
$P(A/B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{120}{300}=0.4$	$P(A/B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{60}{75}=0.8$
$P(A/\overline{B})=\frac{N(A\cap\overline{B})}{N(\overline{B})}=\frac{40}{100}=0.4$	$P(A/\overline{B})=\frac{N(A\cap\overline{B})}{N(\overline{B})}=\frac{120}{150}=0.8$

הן בקרב אלו שלמדו פיתוח קול והן בקרב אלו שלא למדו פיתוח קול
אין קשר סטטיסטי בין אזור המגורים להתקבלות לתחרות השירה.
לכן טענת המארגנים נכונה. (עקב הצמדת גורמים, הסתמנה אפשרות כביכול של קשר סיבתי)

(2) שיעור המתקבלים לתחרות מבין אלו שלמדו פיתוח קול (0.8**), גדול**
משיעור המתקבלים לתחרות מבין אלו שלא למדו פיתוח קול (0.4**),**
לכן ישנה אפשרות שקיים קשר סיבתי בין לימודי פיתוח קול לבין קבלה לתחרות השירה.
יחד עם זאת, ייתכנו גורמים מתווכים אחרים – כמו: גיל המועמדים, מינם, מראם החיצוני ועוד.