נסמן ב- x את מהירות המכונית עד להתנגשות (מ"ש) ובהתאם $0.6x$ לאחר ההתנגשות,
וב- y את זמן תנועת הכדור עד להתנגשות (שניות).
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שניות	מהירות - v מ"ש	דרך-מרחק - s מטרים
המכונית עד להתנגשות	$y+1.5$	x	$x(y+1.5)$
הכדור עד להתנגשות	y	3	$3y$
המכונית לאחר ההתנגשות	$\frac{3y}{0.6x}=\frac{5y}{x}$	$0.6x$	$3y$

המכונית עברה את כל המרחק בין נקודה A לנקודה B כלומר 2.5 מטרים.
המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $x(y+1.5)+3y=2.5$
זמן תנועת המכונית מנקודה A לנקודה B הוא 7 שניות.
המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $y+1.5+\frac{5y}{x}=7$
נפתור שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} x(y+1.5)+3y=2.5 \\ y+1.5+\frac{5y}{x}=7 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} xy+1.5x+3y=2.5 \\ xy+1.5x+5y=7x \end{cases}$$

$$-2y=2.5-7x$$

$$\boxed{y=3.5x-1.25}$$

$$x(3.5x-1.25)+1.5x+3(3.5x-1.25)=2.5$$

$$3.5x^2+10.75x-6.25=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-10.75\pm 14.25}{7}$$

$$\boxed{x=0.5}$$

פתרון שני נפסל כי גם מכונית צעצוע נוסעת במהירות חיובית.
תשובה: מהירות המכונית עד להתנגשות היא 0.5 מטר בשנייה.

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $3^1=3$ אגף שמאל: $\frac{(1+1)(1+2)}{(1\cdot 2)}=3$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\,...(3k)}{(1\cdot 2)(4\cdot 5)(7\cdot 8)\,...(3n-2)(3n-1)}=3^k$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל

$$\frac{(k+2)(k+3)(k+4)\,...(3k)(3k+1)(3k+2)(3k+3)}{(1\cdot 2)(4\cdot 5)(7\cdot 8)\,...(3k-2)(3k-1)(3k+1)(3k+2)}=3^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\,...(3k)}{(1\cdot 2)(4\cdot 5)(7\cdot 8)\,...(3k-2)(3k-1)}\cdot\frac{\cancel{(3k+1)}\,\cancel{(3k+2)}\,(3k+3)}{\cancel{(3k+1)}\,\cancel{(3k+2)}\,(k+1)}=3^{k+1}$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^k\cdot\frac{3\cancel{(k+1)}}{\cancel{k+1}}=3^{k+1}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow 3^{k+1}=3^{k+1}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. יש לחשב את $\frac{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot ...\cdot 42}{2\cdot 20\cdot 56\cdot ...\cdot 1640}$

נשים לב כי עבור $n=14$ מהטענה שהוכחה בסעיף א –

נקבל $1640=(3\cdot 14-2)(3\cdot 14-1)$, $\quad 42=3\cdot 14,$

כלומר יש לחשב את $\frac{(14+2)\cdot(14+3)\cdot(14+4)\cdot ...\cdot(3\cdot 14)}{(1\cdot 2)\cdot(4\cdot 5)\cdot(7\cdot 8)\cdot ...\cdot(3\cdot 14-2)(3\cdot 14-1)}$

או את הביטוי $\frac{(14+1)(14+2)\cdot(14+3)\cdot(14+4)\cdot ...\cdot(3\cdot 14)}{(1\cdot 2)\cdot(4\cdot 5)\cdot(7\cdot 8)\cdot ...\cdot(3\cdot 14-2)(3\cdot 14-1)}\cdot\frac{1}{14+1}$

ועל פי הטענה שהוכחה בסעיף א ערך הביטוי הוא $3^{14}\cdot\frac{1}{15}=318,864.6$

תשובה: $318,864.6$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=8\sin^2 x-\cos 4x$ **, בתחום** $0\le x\le \frac{4}{5}®$

נמצא את ערכי הפונקציה בקצוות התחום הסגור:

$f(0)=8\sin^2 0-\cos 4\cdot 0=0\rightarrow(0,-1)$

$f(0.8®)=8\sin^2 0.8®-\cos 4\cdot 0.8®=3.57\rightarrow(0.8®,3.57)$

נמצא את נקודות הקיצון הפנימיות

$\boxed{f(x)=8\sin^2 x-\cos 4x}$

$f'(x)=16\sin x\cos x+4\sin 4x$

$\boxed{f'(x)=8\sin 2x+8\sin 2x\cos 2x}$

$0=8\sin 2x(1+\cos 2x)$

$\sin 2x=0 \qquad \cos 2x=-1$

$2x=®k \qquad 2x=®+2®k$

$\boxed{x=\frac{®}{2}k} \qquad \boxed{x=\frac{®}{2}+®k}$

כאשר $x=\frac{®}{2}k$ **הוא הפתרון המשותף**

ועבור $k=1$ **נקבל את הפתרון הפנימי היחיד** $x=\frac{®}{2}$

$f(0.5®)=8\sin^2(0.5®)-\cos(4\cdot 0.5®)=7\rightarrow(0.5®,7)$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (בעזרת ערכי הפונקציה)

0		0.5®		0.8®	x
0		7		3.57	y
Min	↗	**Max**	↘	**Max**	**מסקנה**

תשובה: $(0,-1)$ **מינימום מוחלט,** $(0.5®,7)$ **מקסימום מוחלט,** $(0.8®,3.57)$ **מינימום**

ב. לפני הנגזרת השנייה – נעבד קצת את הנגזרת הראשונה

$f'(x) = 8\sin 2x + 8\sin 2x \cos 2x$

$\boxed{f'(x) = 8\sin 2x + 4\sin 4x}$

$\boxed{f''(x) = 16\cos 2x + 16\cos 4x}$

$0 = 16\cos 2x + 16\cos 4x$

$\cos 2x = -\cos 4x$

$\cos 2x = \cos(\pi - 4x)$

$2x = \pi - 4x + 2\pi k \qquad 2x = -\pi + 4x + 2\pi k$

$6x = \pi + 2\pi k \qquad -2x = -\pi + 2\pi k$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k} \qquad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k}$

k	$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
0	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{2}$
1	$x = \frac{\pi}{2}$	

נבנה טבלה לתחומי קמירות וקעירות, שתאפשר לאשר את נקודות הפיתול

$y''(0.1\pi) = 16\cos(2\cdot 0.1\pi) + 16\cos(4\cdot 0.1\pi) = 17.89 > 0 \quad \rightarrow \cup$

$y''(0.4\pi) = 16\cos(2\cdot 0.4\pi) + 16\cos(4\cdot 0.4\pi) = -8 < 0 \quad \rightarrow \cap$

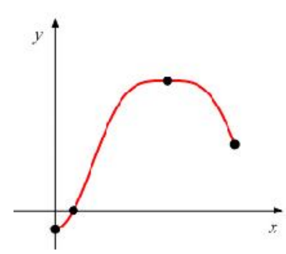
$y''(0.6\pi) = 16\cos(2\cdot 0.6\pi) + 16\cos(4\cdot 0.6\pi) = -8 < 0 \quad \rightarrow \cap$

(קבלנו גם ש- $x = \frac{\pi}{2}$ **מקסימום, כי נמצא בתחום של קעירות כלפי מטה)**

x	$x = 0.8\pi$		$x = \frac{\pi}{2}$		$x = \frac{\pi}{6}$		0
y''		**-**	0	**-**	0	**+**	
מסקנה		$\cap$	**לא פיתול**	$\cap$	**פיתול**	$\cup$	

הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ **כאשר** $\frac{\pi}{6} < x < \frac{4}{5}\pi$ **, הפונקציה קעורה כלפי מעלה** $\cup$ **כאשר** $0 < x < \frac{\pi}{6}$

ג. הפונקציה עוברת משליליות לחיוביות פעם אחת בלבד, על פי הטבלה בסעיף א.



תשובה: יש פתרון אחד למשוואה $f(x) = 0$ **.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$ **,** $(b>0)$ **המוגדרת לכל** x **(תבנית המספר שבשורש חיובית תמיד)**

$$g'(x)=b\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$g'(x)=b\cdot\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{b}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}$$

כיוון ש- $b>0$ **הנגזרת חיובית לכל** x **, והפונקציה עולה לכל** x **.**

תשובה: הפונקציה עולה לכל x .

ב. נמצא אסימפטוטות אופקיות

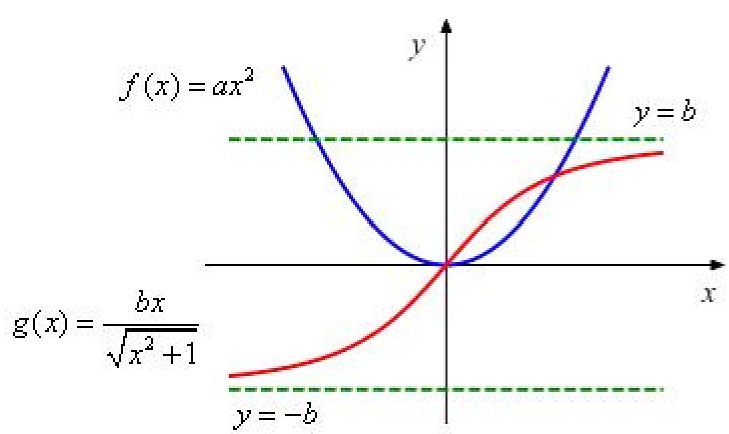
$$g(x)=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{bx}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{bx}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\to1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\to1}=b\quad\to y=b$$

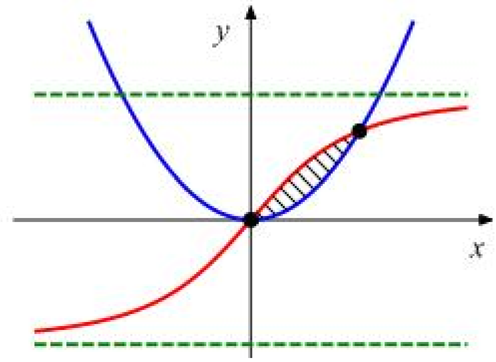
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{bx}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\to1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{bx}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\to1}=-b\quad\to y=-b$$

תשובה: $y=b$ **,** $y=-b$ $\quad g(x)=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$

ג. $a>0$ **, לכן לפונקציה** $f(x)=ax^2$ **גרף של פרבולה בעלת מינימום בראשית הצירים**



ד.



עבור $x=1$ **נקודת החיתוך, נקבל:** $g(1)=\frac{b}{\sqrt{2}}, \quad f(1)=a,$ **, לכן** $b=a\sqrt{2}$

נחשב את השטח הנדרש, כאשר נארגן את הביטוי של האינטגרל,
על פי זיהוי הנגזרת הפנימית שבתוך השורש הריבועי.

$$S=\int_0^1 \left(\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}-ax^2\right)dx$$

$$S=\int_0^1 \left(\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x-ax^2\right)dx$$

$$S=\left(\frac{b}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+1}-\frac{ax^3}{3}\right)\Big]_0^1$$

$$S=\left(b\sqrt{2}-\frac{a}{3}\right)-(b-0)$$

$$S=\boxed{b\sqrt{2}-b-\frac{a}{3}}$$

נציב $b=a\sqrt{2}$ **ונשווה ל-** $\frac{5}{3}-\sqrt{2}$

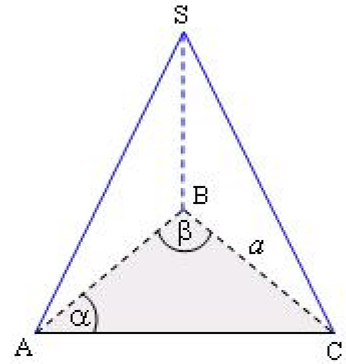
$$\frac{5}{3}-\sqrt{2}=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-a\sqrt{2}-\frac{a}{3}$$

$$5-3\sqrt{2}=6a-3a\sqrt{2}-a$$

$$a=\frac{5-3\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$$

$$\boxed{a=1} \quad \rightarrow \boxed{b=\sqrt{2}}$$

תשובה: $a=1$, $b=\sqrt{2}$



א. נמצא את רדיוס המעגל החוסם את הבסיס

$\underline{\Delta ABC}$

$$\frac{a}{\sin\sim} = 2R$$

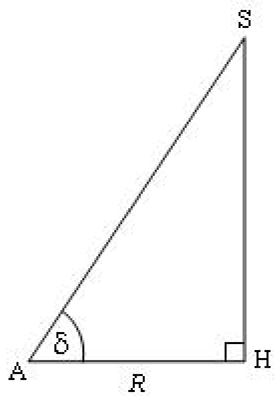
$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin\sim}}$$

תשובה: $R = \dfrac{a}{2\sin\sim}$

ב. נסמן ב- H **את מרכז המעגל החוסם את הבסיס**

לכן הזווית בין המקצוע לבסיס היא $\measuredangle SAH$

נמצא את גובה הפירמידה:



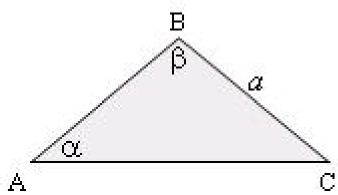
$\underline{\Delta SAH}$

$$\tan ¢ = \frac{SH}{AH}$$

$$SH = R\tan ¢$$

$$\boxed{SH = \frac{a\tan ¢}{2\sin\sim}}$$

נמצא את שטח בסיס הפירמידה



$$S = 2R^2\sin\sim\sin\quad\sin(180-(\sim+\quad))$$

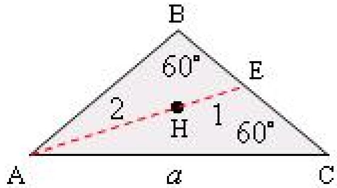
$$\boxed{S = \frac{a^2\sin\quad\sin(\sim+\quad)}{2\sin\sim}}$$

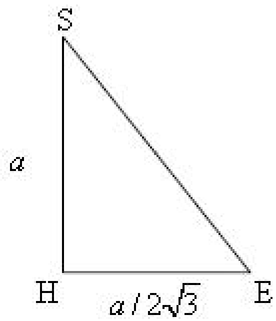
נמצא את נפח הפירמידה

$$V = \frac{a^2\sin\quad\sin(\sim+\quad)}{2\sin\sim}\cdot\frac{a\tan ¢}{2\sin\sim}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{a^3\sin\quad\sin(\sim+\quad)\tan ¢}{12\sin^2\sim}}$$

תשובה: נפח הפירמידה הוא $\dfrac{a^3\sin\quad\sin(\sim+\quad)\tan ¢}{12\sin^2\sim}$





ג. נתון $60° = ¢ = \quad = \sim$

לכן $R = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ **ו-** $SH = \frac{a\tan 60°}{2\sin 60°} = a$

הבסיס, על פי הנתונים, הוא משולש שווה צלעות

לכן מרכז המעגל החוסם הוא גם מפגש תיכוניים,

המחלקים זה את זה ביחס $2:1$ **.**

ואם E **אמצע הצלע** BC , **אז** $HE = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

הזווית שבין הפאה SBC **לבסיס היא** $\sphericalangle SEH$

$\underline{\Delta SEH}$

$\tan\sphericalangle SEH = \frac{SH}{AE}$

$\tan\sphericalangle SEH = \frac{a}{a/2\sqrt{3}}$

$\boxed{\sphericalangle SEH = 73.9°}$

תשובה: $73.9°$