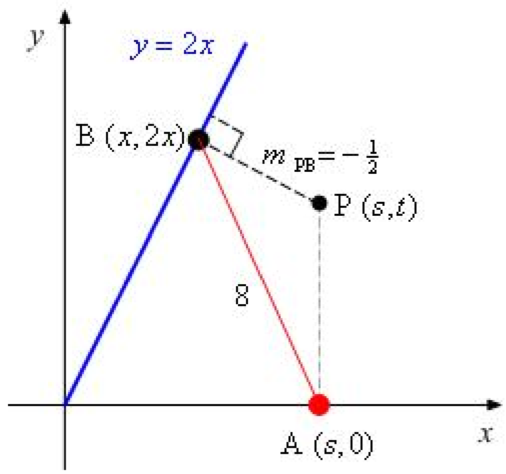
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $P(s,t)$ - נקודה על המקום הגיאומטרי.

האנך לציר ה- x חותך את ציר ה- x בנקודה A , ולכן שיעוריה הם $A(s,0)$.

הישר ℓ שמשוואתו $y = 2x$ מאונך לישר PB ולכן $m_{BP} = -\frac{1}{2}$ (שיפוע הופכי לנגדי)

$$-\frac{1}{2} = \frac{2x-t}{x-s}$$
$$s - x = 4x - 2t$$
$$x = \frac{s+2t}{5}$$

ובהתאם: $B(\frac{s+2t}{5}, \frac{2s+4t}{5})$.

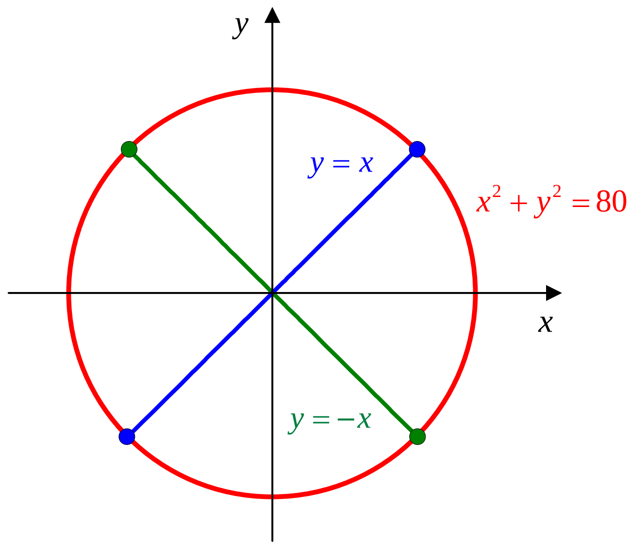
נתון כי $AB = 8$ - נשתמש בנוסחת מרחק בין שתי נקודות

$$8 = \sqrt{(\frac{s+2t}{5} - s)^2 + (\frac{2s+4t}{5} - 0)^2}$$
$$64 = \frac{(2t-4s)^2}{25} + \frac{(2s+4t)^2}{25}$$
$$1600 = 4t^2 16st + 16s^2 + 4s^2 + 16st + 16t^2$$
$$20s^2 + 20t^2 = 1600$$
$$s^2 + t^2 = 80$$

ולכן: משוואת המקום הגיאומטרי היא המעגל $x^2 + y^2 = 80$

<u>תשובה</u>: $x^2 + y^2 = 80$

ב. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



יש למצוא את נקודות החיתוך של המעגל $x^2+y^2=80$ **עם הישרים:** $y=x$ **ו-** $y=-x$

כי נקודות שעל ישרים אלו, נמצאות במרחקים מהצירים השווים זה לזה.

$$\begin{cases} x^2+y^2=80 \\ y=x \end{cases}$$

$$x^2+x^2=80$$

$$x^2=40$$

$$x=\pm\sqrt{40}$$

ונקודות החיתוך הם $(-\sqrt{40},-\sqrt{40})$, $(\sqrt{40},\sqrt{40})$,

ובצורה דומה נקבל את $(\sqrt{40},-\sqrt{40})$, $(-\sqrt{40},\sqrt{40})$, **מהחיתוך של המעגל עם הישר** $y=-x$

<u>תשובה</u>: $(-\sqrt{40},-\sqrt{40})$, $(\sqrt{40},\sqrt{40})$, **,** $(\sqrt{40},-\sqrt{40})$, $(-\sqrt{40},\sqrt{40})$,

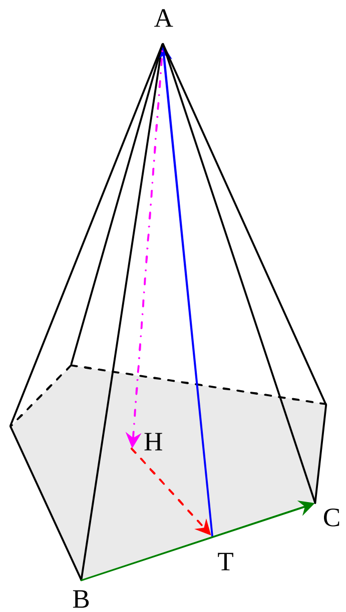
א.

הווקטור $\overrightarrow{TA}$ **הוא גובה למקצוע** $\overrightarrow{BC}$**, לכן** $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

הווקטור $\overrightarrow{AH}$ **הוא גובה לבסיס הפירמידה, לכן** $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HT}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ **,**

על פי המשפט: אם ישר ניצב למישור אז הוא מאונך לכל ישר המונח על המישור

יש להוכיח כי $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TH}=\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{BH}$



$$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TH}=\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{BH}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TH}-\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA}\cdot(\overrightarrow{TH}-\overrightarrow{BH})=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA}\cdot(\overrightarrow{TH}+\overrightarrow{HB})=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=0$$

כיוון ש: $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ **הרי שהוכחנו את הטענה.**

ב. יש להוכיח כי הווקטור $\overrightarrow{HT}$ **ניצב למקצוע** $\overrightarrow{BC}$

כלומר, צ"ל $\overrightarrow{HT}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\overrightarrow{HT}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AT})\cdot\overrightarrow{BC}=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

המחובר השמאלי שווה ל- 0 **, כי הוכח** $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HT}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

המחובר הימני שווה ל- 0 **על פי סעיף א.**

לכן: הוכחנו.

(וכך הוכח המשפט: ישר במישור ($\overrightarrow{BC}$ **) ניצב להיטל המשופע (** $\overrightarrow{TA}$ **)**

על המישור ($\overrightarrow{HT}$ **), אם הישר ניצב למשופע)**

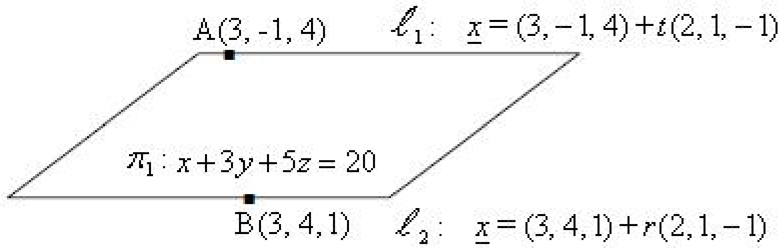
א. נרשום את הנקודות המשתתפות בתרגיל, והסברים בהמשך:

$A(3, -1, 4) \quad B(3, 4, 1)$

נתונים שני ישרים מקבילים $\ell_1: \quad \underline{x} = (3, -1, 4) + t(2, 1, -1)$

$\ell_2: \quad \underline{x} = (3, 4, 1) + r(2, 1, -1)$

נמצא את המישור ®$_1$ **המכיל את שני הישרים:**



$$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A}$$
$$\overrightarrow{AB} = \underline{x} = (0, 5, -3)$$

ההצגה הפרמטרית: ®$_1$ $: \underline{x} = (3, -1, 4) + t(1, 1, -1) + q(0, 5, -3)$

נעבור למשוואת המישור באמצעות חישוב דטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ x-3 & y+1 & z-4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)(-3+5) - (y+1)(-6+0) + (z-4)(10-0) = 0$$
$$2x + 6y + 10z = 40$$
$$\boxed{x + 3y + 5z = 20}$$

<u>תשובה</u>: משוואת המישור ®$_1$ **היא** $x + 3y + 5z = 20$ **.**

ב. המישור ®$_2$ ניצב למישור ®$_1$, ומקביל לשני הישרים הנתונים

(1) נסמן $\underline{h}=(a,b,c)$ **הנורמל למישור** ®$_2$

כיוון שהמישור ®$_2$ **ניצב למישור** $x+3y+5z=20$ **,**

הרי שהנורמל של ®$_1$ **מקביל למישור** ®$_2$ **ונקבל** $(a,b,c)\cdot(1,3,5)=0$ **.**

כיוון $\underline{x}=(3,-1,4)+t(2,1,-1)$ $\ell_1:$ **מקביל למישור נקבל** $(a,b,c)\cdot(2,1,-1)=0$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$(a,b,c)\cdot(1,3,5)=0$$
$$(a,b,c)\cdot(2,1,-1)=0$$
$$\begin{cases} a+3b+5c=0 \\ 2a+b-c=0 \quad /\cdot 5 \end{cases}$$
$$+\begin{cases} a+3b+5c=0 \\ 10a+15b-5c=0 \end{cases}$$
$$11a+18b=0$$

נסמן: $b=-11t$ **ונקבל** $a=8t$ **ועל ידי הצבה במשוואה הראשונה** $c=5t$ **.**

לכן $\underline{h}=(8,-11,5)$

<u>**תשובה:**</u> $\underline{x}=(8,-11,5)$

(2) מישור ®$_2$**, שמשוואתו** $8x-11y+5z+d=0$ **נמצא במרחקים שווים משני הישרים הנתונים, שמקבילים לו**

לכן הוא המישור האמצעי למישורים המקבילים לו העוברים ב- $A(3,-1,4)$ **וב-** $B(3,4,1)$

עבור המישור העובר ב- $A(3,-1,4)$ **:** $8\cdot3-11\cdot(-1)+5\cdot4+d=0\to d=-55$

עבור המישור העובר ב- $B(3,4,1)$ **:** $8\cdot3-11\cdot4+5\cdot1+d=0\to d=15$

לכן $d_{®_2}=\dfrac{-55+15}{2}=-20$

לכן משוואת המישור של ®$_2$ **היא** $8x-11y+5z-20=0$

<u>**תשובה:**</u> $8x-11y+5z-20=0$

א. בסדרה הנדסית נתון $a_3=-5+3\,i$, $a_6=3+5\,i$

$$\frac{a_6}{a_3}=\frac{a_3q^3}{a_3}=q^3$$

$$q^3=\frac{3+5\,i}{-5+3\,i}\cdot\frac{-5-3\,i}{-5-3\,i}$$

$$q^3=\frac{-15-9i-25+15}{5^2+3^2}=\frac{-34i}{34}$$

$$\boxed{q^3=-i}$$

יש להוכיח כי $a_3=a_{15}$

$$a_{15}=a_3q^{12}$$

$$a_{15}=a_3(q^3)^4$$

$$a_{15}=a_3(-i)^4$$

$$a_{15}=a_3\cdot 1$$

$$\boxed{a_{15}=a_3}$$

הוכחנו.

ב. יש למצוא את כל הערכים השונים שיכולה מנת הסדרה לקבל

נמצא את פתרונות המשוואה $q^3=-i=cis270°$, בהתאם לנוסחת השורשים:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\;cis(\frac{\overline{\ }}{n}+\frac{360°k}{n})\quad\rightarrow z_k=\sqrt[3]{1}\;cis(\frac{270°}{3}+\frac{360°k}{3})$$

$$\boxed{z_k=1cis(90°+120°k)}$$

לכן נקבל את שלושת הפתרונות הבאים:

<u>תשובה</u>: $z_3=q_3=cis330°$, $q_2=cis210°$, $q_1=cis90°$

ג. כיוון שהאורך של כל אחת ממנוצת הסדרה הוא 1 ,

אז כאשר עוברים מאיבר לאיבר שלאחריו על ידי כפל במנה – האורך של המספר המרוכב אינו משתנה,

ולכן כל האיברים יהיו בעלי אותו אורך ולכן על אותו מעגל, שמרכזו בראשית הצירים,

כי המרחק שלהם מהראשית הוא קבוע.

נחשב את המרחק מראשית הצירים: $r=|3+5\,i|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

תשובה:כל איברי הסדרה נמצאים על מעגל קנוני, שרדיוסו $\sqrt{34}$.

(משוואת המעגל היא $x^2+y^2=34$)

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ **, המוגדרת לכל** x **(מכנה חיובי תמיד, סכום של שני מחוברים חיוביים)**

יש להוכיח כי הפונקציה עולה לכל x**.**

נראה כי הנגזרת חיובית לכל x**.**

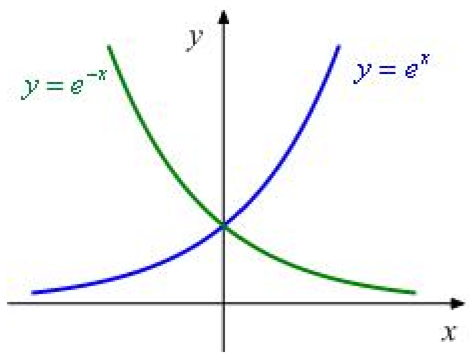
$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$$

גם המונה וגם המכנה חיוביים לכל x **ולכן המנה חיובית והפונקציה עולה לכל** x**.**

אולם נראה גם בדרך אחרת.

ניעזר בגרפים הבאים:



כיוון ש- $y=e^x$ **עולה לכל** x **ו-** $y=e^{-x}$ **יורדת לכל** x,

הרי שכאשר x **גדל המחובר הימני במונה** $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

כאשר המחובר הימני במכנה קטן ולכן המנה גדלה.

<u>תשובה</u>: הפונקציה עולה לכל x.

ב. ניעזר בגרפים הקודמים גם לקביעת האסימפטוטות האופקיות

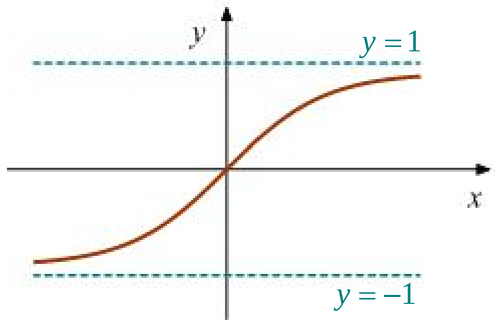
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-0}{e^x+0}=1 \quad\to y=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{0-e^{-x}}{0+e^{-x}}=-1 \quad\to y=-1$$

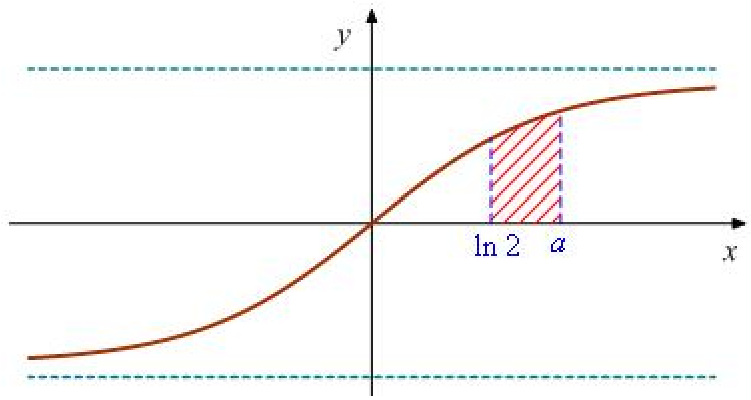
<u>תשובה</u>: $y=1$ **,** $y=-1$

ג. אם נציב $x=0$ נקבל $f(0)=\frac{e^0-e^{-0}}{e^0+e^{-0}}=\frac{1-1}{1+1}=0$, כלומר הפונקציה עוברת בראשית הצירים.

ובהתאם לעליית הפונקציה לכל x ולאסימפטוטות האופקיות – הסקיצה המתאימה:



ד. נחשב את השטח הנדרש ע"י זיהוי הנגזרת הפנימית של הביטוי במכנה



נחשב את השטח הנדרש:

$$S=\int_{\ell n2}^{a}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\frac{1}{e^x+e^{-x}}\cdot(e^x-e^{-x})$$

$$S=\left(\ell n\left|e^x+e^{-x}\right|\right)\Big]_{\ell n2}^{a}$$

$$S=\ell n(e^a+e^{-a})-\ell n(e^{\ell n2}+e^{-\ell n2})$$

$$S=\ell n(e^a+e^{-a})-\ell n(2+\frac{1}{2})$$

$$S=\boxed{\ell n(e^a+e^{-a})-\ell n2.5}$$

$$\ell n(e^a + e^{-a}) - \ell n\, 2.5 = \ell n\, 4 - \ell n\, 3$$

$$\ell n(e^a + e^{-a}) = \ell n\, 4 - \ell n\, 3 + \ell n\, 2.5$$

$$\ell n(e^a + e^{-a}) = \ell n \frac{4 \cdot 2.5}{3}$$

$$e^a + e^{-a} = \frac{10}{3} \quad \to \quad e^a + \frac{1}{e^a} = \frac{10}{3}$$

$$3e^{2a} - 10e^a + 3 = 0 \quad \to \quad e^a{}_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$e^a = 3 \qquad\qquad e^a = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{a = \ell n\, 3} \qquad\qquad \cancel{a = \ell n \frac{1}{3}} \leftarrow a > \ell n\, 3$$

תשובה: $a = \ell n\, 3$