א. נסמן ב- x את כמות המים (מ"ק) שצינור I מזרים בדקה.

צינור II מזרים 18 מ"ק בדקה לבריכה.

נסמן ב- t את הזמן בדקות שצינור I הזרים ביום ראשון.

	צינור	זמן (דקות)	כמות לדקה (מ"ק)	סה"כ (מ"ק)
יום ראשון	I	t	x	xt
	II	$t-m$	18	$18(t-m)$
למחרת	I	$t-12$	x	$x(t-12)$
	II	$t-12$	18	$18(t-12)$

ביום הראשון צינור I הזרים פי 2 מים מצינור II, לכן: $tx=36(t-m)$

כמויות המים שהוזרמה בשני הימים שוות, לכן: $xt+18(t-m)=x(t-12)+18(t-12)$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} tx=36(t-m) \\ xt+18(t-m)=x(t-12)+18(t-12) \end{cases}$$

$$xt+18t-18m=xt-12x+18t-216$$

$$\Leftrightarrow 12x=18m-216$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=1.5m-18}$$

$$t(1.5m-18)=36(t-m)$$

$$\Leftrightarrow t(1.5m-18)-36t=-36m$$

$$\Leftrightarrow t(1.5m-54)=-36m$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t=\frac{36m}{54-1.5m}}$$

תשובה: (1) $1.5m-18$ **מ"ק לדקה (2)** $\frac{36m}{54-1.5m}$ **דקות**

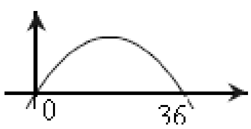
ב. נמצא את תחום ערכי m עבורם יש פתרון למשוואה:

כמות המים המוזרמת חיובית, לכן: $m>12 \leftarrow 1.5m-18>0$

הזמן בו צינור I הזרים ביום הראשון הוא חיובי: לכן $36m(54-1.5m)>0 \leftarrow \frac{36m}{54-1.5m}>0$

ובהתאם לציור המתאים של פרבולה בעלת מקסימום

נקבל כי $0<n<36$



לאחר חיתוך של שני התחומים שמצאנו נקבל תשובה סופית: $12<m<36$

תשובה: $12<m<36$

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $3\cdot1^2+8\cdot1+4=15$ **אגף שמאל:** $(2\cdot1+1)+(2\cdot1+3)+(2\cdot1+5)=15$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+...+(4k+3)=3k^2+8k+4$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$(2k+3)+(2k+5)+(2k+7)+...+(4k+3)+(4k+5)+(4k+7)=3(k+1)^2+8(k+1)+4$$

$$\underline{(2k+1)(2k+3)+(2k+5)+(2k+7)+...+(4k+3)}+6k+11=3(k^2+2k+1)+8k+8+4$$

$$\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3k^2+8k+4 \quad +6k+11=3k^2+6k+3+8k+12$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow 3k^2+14k+15=3k^2+14k+15$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. **בדקנו את נכונות הטענה עבור** $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

ב. על פי סעיף א: $b_n=(2n1+1)+(2n+3)+(2n+5)+...+(4n+3)=3n^2+8n+4$

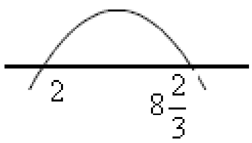
לכן: $a_n=40n-48-b_n=40nb_n-(3n^2+8n+4)=-3n^2+32n-52$

למציאת מספר האיברים החיוביים בסדרה, נפתור את האי-שוויון: $a_n=-3n^2+32n-52>0$

$$n_{1,2}=\frac{-32\pm20}{-6}$$

$$n_1=2,\quad n_2=8\frac{2}{3}$$

ובהתאם לציור המתאים של פרבולה בעלת מקסימום



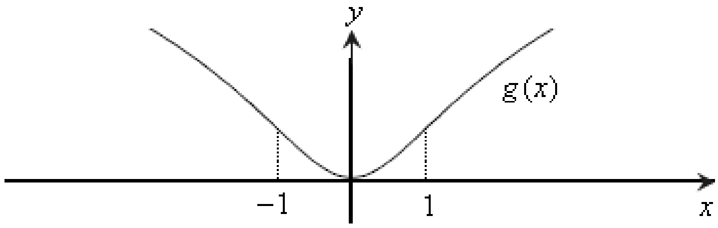
נקבל כי $2<n<8\frac{2}{3}$

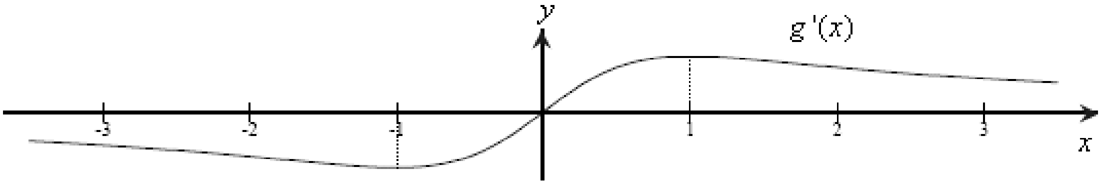
בתחום זה ישנם ששה מספרים טבעיים ($3,4,5,6,7,8$**) – לכן ישנם ששה איברים חיוביים בסדרה** a_n

תשובה: ששה איברים חיוביים

נכתב ע"י עפר ילין

א. נשרטט את הגרף של $g(x)$ ומתחתיו את הגרף של $g'(x)$ ונסביר בהמשך:





כאשר פונקציה עולה הנגזרת שלה חיובית, וכאשר יורדת הנגזרת שלה שלילית.

ובהתאם אם $g'(x)>0$ עבור $x>0$, אז בתחום זה $g(x)$ עולה.

אם $g'(x)<0$ עבור $x<0$, אז בתחום זה $g(x)$ יורדת.

נתון כי $g(0)=0$, לכן בהתאם לתחומי עלייה וירידה $(0,0)$ מינימום.

עבור $x=1$ $g'(x)$ עוברת מעלייה לירידה,

לכן הנגזרת שלה $g''(x)$ מקעירות כלפי מעלה $\cup$ לקעירות כלפי מטה $\cap$, כלומר עבור $x=1$ פיתול של $g(x)$.

עבור $x=-1$ $g'(x)$ עוברת מירידה לעלייה,

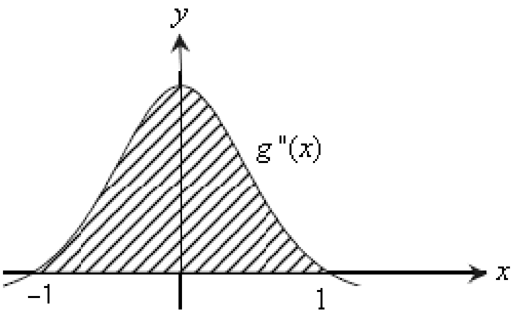
לכן הנגזרת שלה $g''(x)$ מקעירות כלפי מטה $\cap$לקעירות כלפי מעלה $\cup$, כלומר עבור $x=-1$ פיתול של $g(x)$.

ב. הגרף שבציור II של $g''(x)$ חותך את ציר ה- x פעמיים, כלומר $g''(x)=0$ בנקודות אלו.

על פי א' לפונקציה שתי נקודות פיתול ב: $x=\pm 1$ ולכן אלו שיעורי נקודות החיתוך של $g''(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי $g'(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ כלומר זוהי הפונקציה הקדומה של $g''(x)$.

נחשב בהתאם את השטח המבוקש:



$$S=\int_{-1}^{1} g''(x)\,dx \quad \to S=g'(x)\Big]_{-1}^{1}$$

$$S=\frac{x}{1+x^2}\Big]_{-1}^{1}$$

$$S=(\frac{1}{1+1^2})-(\frac{-1}{1+(-1)^2})$$

$$S=0.5-(-0.5)=1$$

$$\boxed{S=1}$$

תשובה: גודל השטח המבוקש 1 יח"ר

נכתב ע"י עפר ילין

נתונה הפונקצייה $f(x)=x\sqrt{x^2+2}$, המוגדרת לכל x (הביטוי בשורש חיובי תמיד)

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *שיפוע המשיק* , כלומר את $m=f'(x)$

$$\boxed{f(x)=x\sqrt{x^2+2}}$$

$$m=f'(x)=1\cdot\sqrt{x^2+2}+\frac{x\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}$$

$$m=\frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\boxed{m=\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}}$$

נביא פונקציה זו למינימום, ולמעשה קיצון לשיפוע יתקבל בנקודת הפיתול של הפונקציה המקורית !

$$m'=\frac{4x\cdot\sqrt{x^2+2}-\dfrac{(2x^2+2)\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$$

$$m'=\frac{x(4(x^2+2)-(2x^2+2))}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$m'=\frac{x(4x^2+8-2x^2-2)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

$$\boxed{m'=\frac{x(2x^2+6)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}}$$

לכן נגזרת השיפוע מתאפסת רק עבור $x=0$ (כל שאר תבניות המספר חיוביות לכל x).

עבור $x<0$ נקבל $m'<0$ ועבור $x>0$ נקבל $m'>0$ ולכן $x=0$ מינימום.

נמצא את שיעורי נקודת ההשקה: $f(0)=0\sqrt{0^2+2}=0$, כלומר המשיק עובר בראשית הצירים.

נמצא את שיפוע המשיק: $m=\frac{2\cdot 0^2+2}{\sqrt{0^2+2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

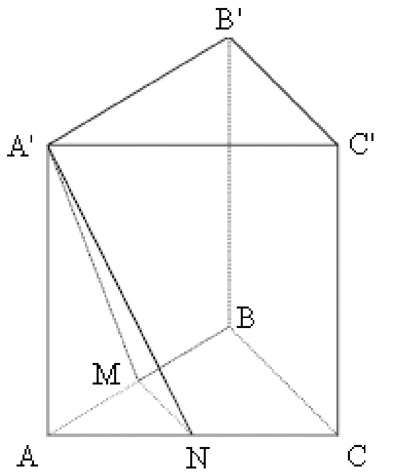
ובהתאם משוואת המשיק, העובר בראשית, היא $y=\sqrt{2}x$

תשובה: $y=\sqrt{2}x$

ב. שיפוע ישר שווה ל $\tan$ של הזווית בין הישר לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x ,

לכן: $a=\arctan\sqrt{2}=54.74^\circ$

תשובה: 54.74°



א. ΔABC **שווה שוקיים** $(AB = AC)$

MN **קטע אמצעים במשולש, המקביל לבסיס.**

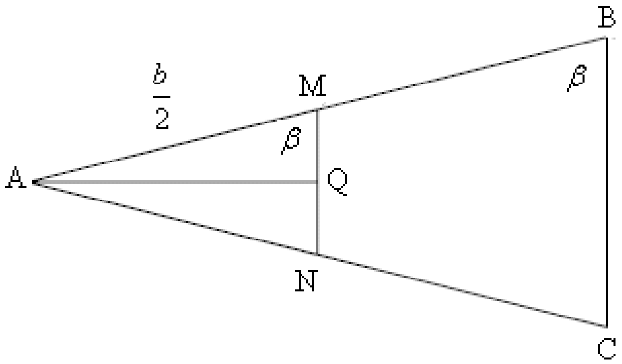
נסמן ב- Q **את אמצע** MN

MN **מקביל לבסיס ובהתאם** $\mathbf{S}AMQ = \mathbf{S}ABC = b$

$\underline{\Delta AMQ}$

$$\cos b = \frac{MQ}{AM}$$

$$\boxed{MQ = \frac{b\cos b}{2}}$$



$\Delta A'AM \cong \Delta AAN$ **(צ.ז.צ) לכן** $\Delta MA'N$ **ש"ש**

$(MA' = NA')$

$A'Q$ **תיכון לבסיס ולכן גם חוצה זווית הראש.** $\frac{b}{2}$

$\underline{\Delta MA'N}$

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{MQ}{A'M}$$

$$\boxed{A'M = \frac{b\cos b}{2\sin\frac{a}{2}}}$$

משפט פיתגורס במשולש ישר הזווית $AA'M$

$$AA'^2 + AM^2 = A'M^2$$

$$AA' = \sqrt{\left(\frac{b\cos b}{2\sin\frac{a}{2}}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad \rightarrow AA' = \sqrt{\frac{b^2\cos^2 b}{4\sin^2\frac{a}{2}} - \frac{b^2}{4}}$$

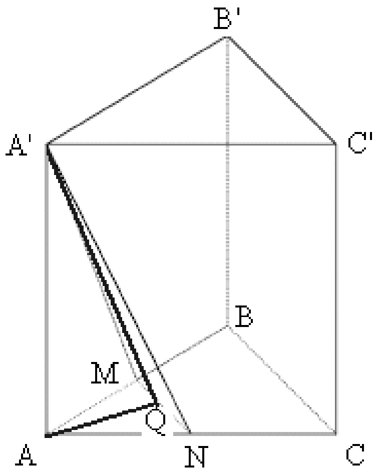
$$AA' = \sqrt{\frac{b^2\cos^2 b - b^2\sin^2\frac{a}{2}}{4\sin^2\frac{a}{2}}}$$

$$\boxed{AA' = \frac{b}{2\sin\frac{a}{2}}\sqrt{\cos^2 b - \sin^2\frac{a}{2}}}$$

תשובה: גובה המנסרה הוא $\frac{b}{2\sin\frac{a}{2}}\sqrt{\cos^2 b - \sin^2\frac{a}{2}}$

ב. נתון $a = 90°$ **ו-** $b = 30°$ **.**

הזווית שבין המישור $A'MN$ **למישור המשולש** ABC **,**



היא הזווית שבין שני האנכים לישר החיתוך MN **,**

שהם: $A'Q$ **ו-** AQ **, כלומר** $\mathbf{S}A'QA$ **ב-** $\Delta A'QA$ **.**

ΔMAQ **הוא עם זוויות** $30°, 60°, 90°$ **ולכן** $AQ = \frac{b}{4}$

אם נציב $a = 90°$ **ו-** $b = 30°$ **בגובה המנסרה, נקבל:**

$$\frac{b}{2\sin 45°}\sqrt{\cos^2 30° - \sin^2 45°} = \frac{b}{2\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

$\underline{\Delta A'QA}$

$$\tan \mathbf{S}A'QA = \frac{A'A}{AQ}$$

$$\tan \mathbf{S}A'QA = \frac{b/2\sqrt{2}}{b/4}$$

$$\tan \mathbf{S}A'QA = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\mathbf{S}A'QA = 54.74°}$$

תשובה: הזווית שבין המישור $A'MN$ **למישור המשולש** ABC **,** $54.74°$