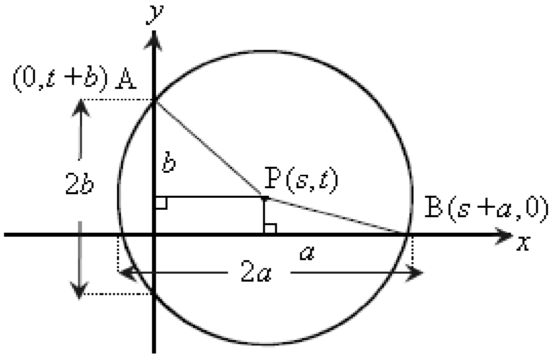
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $\mathrm{P}(s,t)$ **- נקודה על המקום הגיאומטרי.**

האנך לציר ה- x **חוצה את המיתר שאורכו** $2a$ **ולכן שיעורי הנקודה** $\mathrm{B}(s+a,0)$ **.**

האנך לציר ה- y **חוצה את המיתר שאורכו** $2b$ **ולכן שיעורי הנקודה** $\mathrm{A}(0,t+b)$ **.**

מרחק מרכז המעגל מנקודות החיתוך עם הצירים האלו שווה לרדיוס, ולכן:

$$\sqrt{(s-0)^2+(t-(t+b)^2}=\sqrt{(s-(s+a)^2+(t-0)^2} \quad (\quad)^2$$

$$s^2+(t-t-b)^2=(a-a-a)^2+t^2$$

$$s^2+b^2=a^2+t^2$$

$$s^2-t^2=a^2-b^2$$

$$\boxed{x^2-y^2=a^2-b^2}$$

נתון כי $a>b>0$ **ולכן אגף ימין חיובי.**

וזו משוואה של היפרבולה: $x^2-y^2=a^2-b^2$

תשובה: $x^2-y^2=a^2-b^2$

ב. מרכז המעגל $x^2-8x+y^2-6y=0$ **נמצא על המקום הגיאומטרי:** $x^2-y^2=a^2-b^2$ **.**

נארגן את משוואת המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ **ובהתאם מרכזו** $(4,3)$ **ורדיוסו** 5 **.**

משפט פיתגורס במשולש המונח על ציר ה- x **:** $a=\sqrt{5^2-3^2}=4$

משפט פיתגורס במשולש המונח על ציר ה- y **:** $b=\sqrt{5^2-4^2}=3$

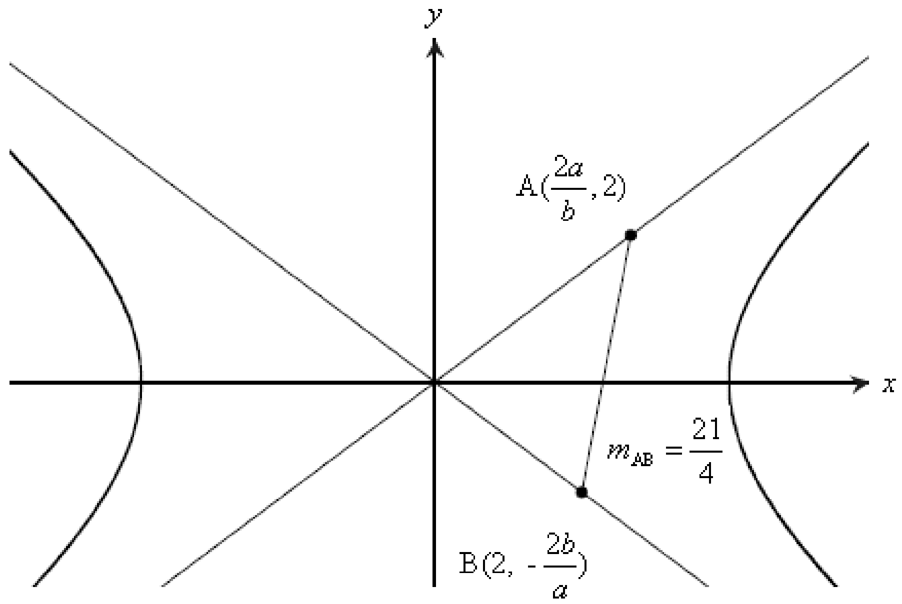
ולכן משוואת המקום הגיאומטרי היא $x^2-y^2=4^2-3^2$ **, כלומר:** $x^2-y^2=7$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **, נמצאים קדקודי ההיפרבולה, בהם מתקיים** $y=0$ **,**

ולכן שיעורי נקודת החיתוך הנם: $(-\sqrt{7},0)$, $(\sqrt{7},0)$,

תשובה: $(-\sqrt{7},0)$, $(\sqrt{7},0)$,

א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



שיעור ה- y **של הנקודה** A **הוא** 2 **ושיעור ה-** x **של הנקודה** B **הא** 2**.**

משוואת האסימפטוטה עם שיפוע חיובי היא $y=\frac{b}{a}x$ **ולכן שיעורי הנקודה** $A(\frac{2a}{b},2)$**.**

משוואת האסימפטוטה עם שיפוע שלילי היא $y=-\frac{b}{a}x$ **ולכן שיעורי הנקודה** $B(2, -\frac{2b}{a})$**.**

בהתאם לנוסחת שיפוע בין שתי נקודות: $m_{AB}=\frac{21}{4} \quad \rightarrow \frac{21}{4}=\frac{2+\frac{2b}{a}}{\frac{2a}{b}-2}$

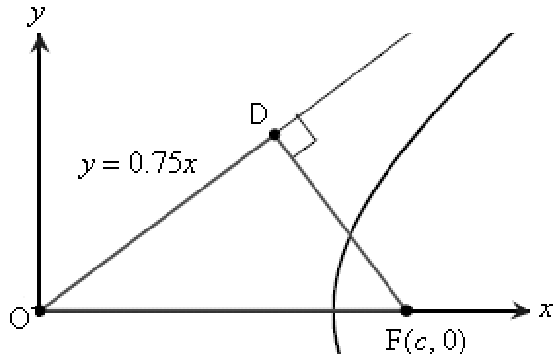
ניתן להות את היחס המבוקש $\frac{b}{a}$ **ואת הביטוי ההופכי לו ונסמן** $t=\frac{b}{a}$**.**

$$\frac{21}{4}=\frac{2+2t}{\frac{2}{t}-2}$$
$$\frac{21}{4}=\frac{2t(1+t)}{2(1-t)}$$
$$21(1-t)=4t(1+t)$$
$$4t^2++25t-21=0$$
$$t=\frac{3}{4} \quad t=-7$$

נתון כי $a>0$ **,** $b>0$ **ולכן הפתרון** $\frac{b}{a}=-7$ **נפסל והיחס המבוקש הוא** $\frac{3}{4}$**.**

תשובה: $\frac{3}{4}$

ב. . נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



על פי סעיף א, משוואת האסימפטוטה העולה היא $y = 0.75x$ **, או** $-0.75x + y = 0$

שיעורי המוקד הימני של ההיפרבולה הם $\mathrm{F}(c, 0)$ **והוא נמצא מתחת לאסימפטוטה העולה.**

המרחק של המוקד הימני F **מהאסימפטוטה ששיפועה חיובי הוא** 3**,**

ולכן על פי נוסחת מרחק נקודה מישר:

$$3 = -\frac{-0.75c + 0}{\sqrt{0.75^2 + 1}}$$

$$3.75 = 0.75c$$

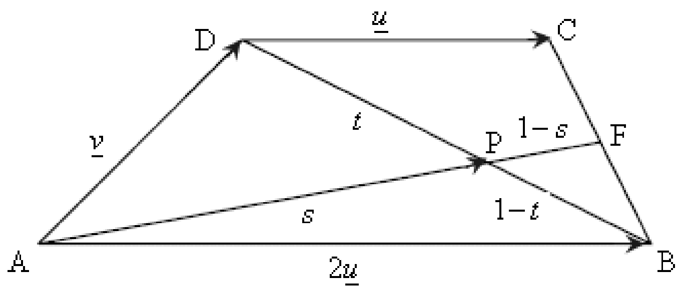
$$c = 5$$

משפט פיתגורס במשולש ODF **:** $\mathrm{OD} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

ולכן שטח משולש ODF **, ישר הזווית, הוא** $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

תשובה: שטח משולש ODF **הוא** 6 **יח"ר.**

א. נעלה ציור מעודכן המתאים לנתוני התרגיל



נתון כי $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$ $(DC \parallel AB)$ **ו-** $\overrightarrow{DC}=\underline{u}$

לכן: $\boxed{\overrightarrow{AB}=2\underline{u}}$

נתון כי נקודה F **היא אמצע השוק** CB **,**

לכן: $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\underline{v}+\underline{u})+\frac{1}{2}\cdot 2\underline{u}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AF}=1.5\underline{u}+0.5\underline{v}}$$

תשובה: $\overrightarrow{AF}=1.5\underline{u}+0.5\underline{v}$

ב. נתון כי $\overrightarrow{PD}=t\overrightarrow{BD}$ **, כלומר הנקודה** P **מחלקת את האלכסון** BD **ביחס של** $\frac{t}{1-t}$ **(ראה ציור)**

ובהתאם: $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AD}$

$$\boxed{\overrightarrow{AP}=t\cdot 2\underline{u}+(1-t)\underline{v}}$$

כמו כן: $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AF}$

ובהתאם $\boxed{\overrightarrow{AP}=1.5s\underline{u}+0.5s\underline{v}}$

על פי יחודיות ההצגה של הווקטור $\overrightarrow{AP}$ **, נקבל מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים:**

$$\begin{cases} 2t=1.5s & \rightarrow t=0.75s \\ 1-t=0.5s \end{cases}$$

$$1-0.75s=0.5s$$

$$1=1.25s$$

$$\boxed{s=0.8}$$

$$t=0.750.8$$

$$\boxed{t=0.6}$$

תשובה: $s=0.8$ **,** $t=0.6$

ג. נמצא את היחס בין שטחי המשולשים:

$$\frac{S_{\Delta \text{BPF}}}{S_{\Delta \text{APD}}}=\frac{\frac{\text{PF}\cdot\text{PB}\cdot\sin\mathbf{R}\text{FPB}}{2}}{\frac{\text{PD}\cdot\text{PA}\cdot\sin\mathbf{R}\text{APD}}{2}}$$

$$\frac{S_{\Delta \text{BPF}}}{S_{\Delta \text{APD}}}=\frac{\text{PF}}{\text{PA}}\cdot\frac{\text{PD}}{\text{PB}} \quad \leftarrow \mathbf{R}\text{FPB}=\mathbf{R}\text{APD}$$

$$\frac{S_{\Delta \text{BPF}}}{S_{\Delta \text{APD}}}=\frac{1-s}{s}\cdot\frac{1-t}{t}$$

$$\frac{S_{\Delta \text{BPF}}}{S_{\Delta \text{APD}}}=\frac{1-0.8}{0.8}\cdot\frac{1-0.6}{0.6}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta \text{BPF}}}{S_{\Delta \text{APD}}}=\frac{1}{6}}$$

תשובה: היחס בין שטח המשולש BPF **ובין שטח המשולש** APD **הוא** $\frac{1}{6}$**.**

יש לפתור את האי-שוויון: $9\cdot(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}+5<4\cdot(\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}$

תחום הגדרה: $\{x|x\neq 0\}$

$$9\cdot(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}+5<4\cdot\frac{1}{(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}} \quad \leftarrow a^m=\frac{1}{(\frac{1}{a})^m}$$

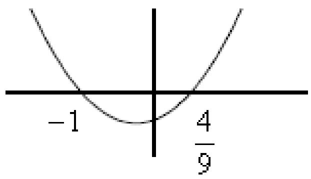
$$9\cdot t+5<4\cdot\frac{1}{t} \quad \leftarrow t=(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}$$

$$9t^2+5t-4<0 \quad \leftarrow t=(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}>0$$

$$t_{1,2}=\frac{-5\pm 13}{18}$$

$$t_1=\frac{4}{9}, \quad t_2=-1$$

$$(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}=\frac{4}{9}, \quad (\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}=-1$$



ובהתאם לציור המתאים, נקבל $-1<(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}<\frac{4}{9}$

כיוון ש $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}$ **חיובי בתחום ההגדרה,**

הרי יש לפתור את האי שוויון $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}<\frac{4}{9}$

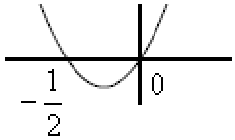
$$(\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}<(\frac{3}{2})^{-2}$$

$$\frac{1}{x}<-2$$

$$\frac{1}{x}+2<0$$

$$x+2x^2<0 \quad \leftarrow \cdot x^2$$

$$x(1+2x)<0$$



ובהתאם לציור המתאים נקבל $-\frac{1}{2}<x<0$

שתואם את תחום ההגדרה

תשובה: $-\frac{1}{2}<x<0$

נתון כי $z=x+iy$ **מקיים את המשוואה** $\left|z-(1-i)\right|^2=\left|z\right|^2+\left|\left(\frac{2}{1+i}\right)^2\right|$

יש למצוא את משוואת המקום הגיאומטרי, במישור גאוס,

של כל הנקודות (x,y) **המקיימות את המשוואה.**

נציב $z=x+iy$ **במשוואה ונמצא את המקום הגיאומטרי המבוקש:**

$$\left|x+iy-(1-i)\right|^2=\left|x+iy\right|^2+\left|\left(\frac{2}{1+i}\right)\right|^2$$

$$\left|x+iy-1+i\right|^2=x^2+y^2+\left|\left(\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2\right|$$

$$\left|x-1+(y+i)i\right|^2=x^2+y^2+\left|\frac{2(1-i)^2}{2}\right|$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=x^2+y^2+\left|-2i\right|$$

$$x^2-2x+1=y^2+2y+1=x^2+y^2+2$$

$$\boxed{y=x}$$

תשובה: $y=x$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{ax}}{4x^2+1}$, $a>0$ **(המוגדרת לכל** x**, כי המכנה חיובי תמיד)**

פונקצית הנגזרת $f'(x)$ **שווה לאפס בנקודה אחת בלבד.**

$$f(x)=\frac{e^{ax}}{4x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{ae^{ax}(4x^2+1)-e^{ax}\cdot 8x}{(4x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{ax}(4ax^2-8x+a)}{(4x^2+1)^2}}$$

הביטוי היחיד בפונקצית הנגזרת שיכול להתאפס הוא $4ax^2-8x+a$ **(ששני הביטויים האחרים חיוביים תמיד),**

והתנאי לפתרון יחיד הוא $\Delta=0$

$$64-16a^2=0$$

$$a^2=4$$

$$\boxed{a=2} \leftarrow a>0$$

תשובה: $a=2$

ב. הפונקציה הנתונה היא, על פי א', $f(x)=\frac{e^{2x}}{4x^2+1}$ **והיא חיובית לכל** x **(גם המונה וגם המכנה חיוביים תמיד)**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן** $f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}}{4\cdot 0^2+1}=1$ **:**

תשובה: $(0,1)$ **.**

ג. (1) כאשר $f'(x)>0$ **מתקיים** $f(x)$ **עולה, וכאשר** $f'(x)<0$ **מתקיים** $f(x)$ **יורדת.**

לכן, על פי ציור גרף הנגזרת $f(x)$ **עולה לכל** x **.**

עבור $x=b$ **שבו הנגזרת מתאפסת נקבל נקודת פיתול (שבה המשיק מקביל לציר ה-** x **וחותך את** $f(x)$ **),**

כיוון שהפונקציה עולה עבור $x<b$ **וגם עבור** $x>b$ **.**

תשובה: $f(x)$ **עולה לכל** x **.**

(2) כאשר $f'(x)$ **יורדת הרי ש:** $f''(x)<0$ **ובהתאם:** $f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $\cap$ **עבור** $c<x<b$

כאשר $f'(x)$ **עולה הרי ש:** $f''(x)>0$ **ובהתאם:** $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $\cup$ **עבור** $x>b$ **או** $x<c$

ד. בהתאם גרף הפונקציה, שכאמור חיובית לכל x