א. נסמן ב- x את כמות העוגיות שמכונה I מכינה בדקה.

נסמן ב- y את כמות העוגיות שמכונה II מכינה בדקה.

נסמן ב- t את הזמן, הזהה, בדקות ששתי המכונות עבדו ביום ראשון.

	מכונה	זמן (דקות)	כמות לדקה (עוגיות)	סה"כ (עוגיות)
יום ראשון	I	t	x	tx
	II	t	y	ty
יום שני	I	$\frac{ty}{x}$	x	ty
	II	$\frac{tx}{y}$	y	tx

ביום ראשון מכונה I הכינה 80 עוגיות יותר ממכונה II, לכן: $tx = ty + 80$

זמן העבודה של מכונה II ביום שני היה גדול פי $\frac{25}{9}$

מזמן העבודה של מכונה I ביום שני, לכן: $\frac{25}{9} \cdot \frac{ty}{x} = \frac{tx}{y}$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (1) \quad tx = ty + 80 \\ (2) \quad \frac{25}{9} \cdot \frac{ty}{x} = \frac{tx}{y} \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{25}{9} \cdot \frac{ty}{x} = \frac{tx}{y} \quad / : t \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25y}{9x} = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \Leftrightarrow 25y^2 = 9x^2 \quad / \sqrt{\ } \quad x, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x \quad \rightarrow \quad \Leftrightarrow \boxed{y = 0.6x}$$

$$(1) \quad tx = ty + 80$$

$$\Leftrightarrow tx = t \cdot 0.6x + 80 \quad \rightarrow \quad \Leftrightarrow 0.4x = 80$$

$$\Leftrightarrow \boxed{xt = 200}$$

לכן, מספר העוגיות שהכינה מכונה I ביום הראשון הוא 200,

ומספר העוגיות שהכינה מכונה II הוא 120.

תשובה: שתי המכונות הכינו ביחד, ביום ראשון, 320 עוגיות.

ב. אם היחס בין ההספק של מכונה I להספק של מכונה II הוא $5:3$,

אז היחס בין הזמנים הדרושים להכנת עוגייה אחת הוא $3:5$.

תשובה: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{3}{5}$

א. 1. נבדוק עבור $n=2$ **:**

אגף ימין: $4^2\cdot\frac{1\cdot 2}{2+1}=10\frac{2}{3}$ $>$ **אגף שמאל:** $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2}=12$

לכן, הטענה נכונה עבור $n=2$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k>1$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ..\cdot 2k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}>4^n\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}{k+1}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\frac{\boxed{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ..\cdot 2k}\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)}{\boxed{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}\cdot(k+1)}>4^{k+1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k\cdot(k+1)}{k+2}$$

$$4^k\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)}{(k+1)\cdot(k+1)}<4^{k+1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k\cdot(k+1)}{k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הקטן ממנו,

לכן, די אם נוכיח אי-שוויון חלש (כולל סימן השוויון)

$$4^k\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k\cdot(2k+1)\cdot 2\,\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}\cdot(k+1)}\ge 4\cdot 4^k\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k\cdot(k+1)}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{4^k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}\cdot\frac{2(2k+1)}{k+1}\ge\boxed{4^k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}$$

הביטויים שבמסגרת שלמים וחיוביים, לכל $k>1$ **, ולכן די אם נוכיח את האי שוויון הבא:**

$$\Leftrightarrow \frac{2(2k+1)}{k+1}\ge\frac{4(k+1)}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)}\ge\frac{4(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4k^2+10k+4}{(k+1)(k+2)}\ge\frac{4k^2+8k+4}{(k+1)(k+2)}$$

המונה באגף שמאל גדול מהמונה באגף ימין, כאשר המכנים זהים (וחיוביים)

מתקבל שאגף שמאל גדול מאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k>1$ **טבעי**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n>1$ **טבעי.**

ב. על פי סעיף א, מתקיים עבור $n=9$:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ..\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 9} > 4^9\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 9}{10}$$

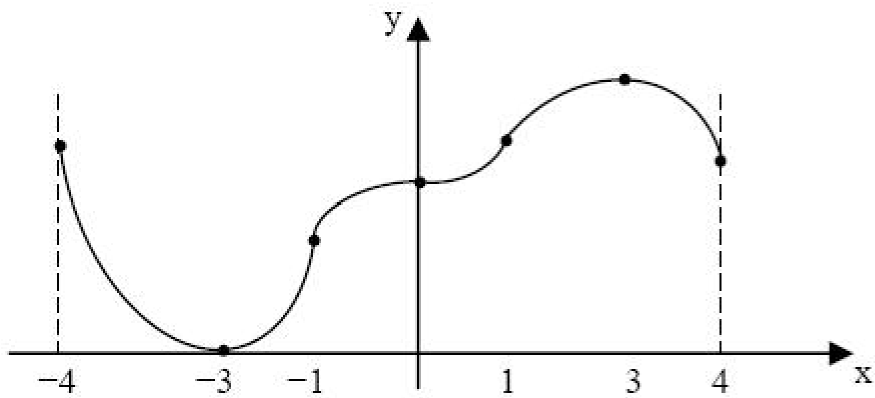
$$\frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 9}\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot ...18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 9} > 4^9\,\frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 9}}{10} \quad /(\cdot 10)$$

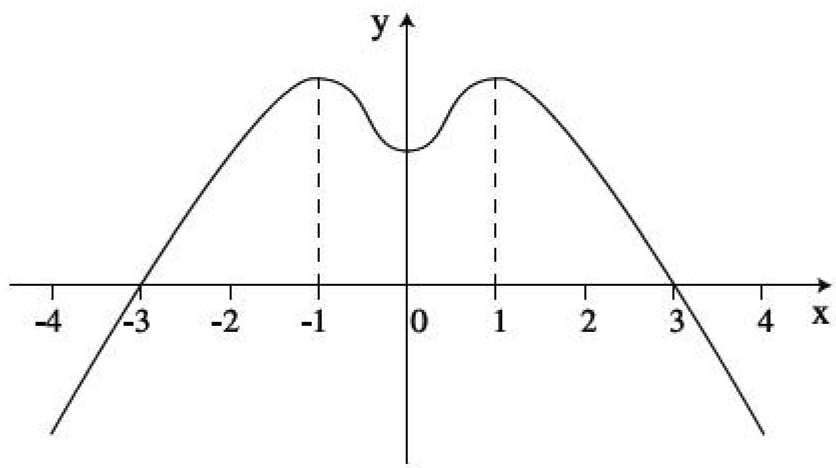
$$\Leftrightarrow \frac{10\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot ...18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 9} > 4^9$$

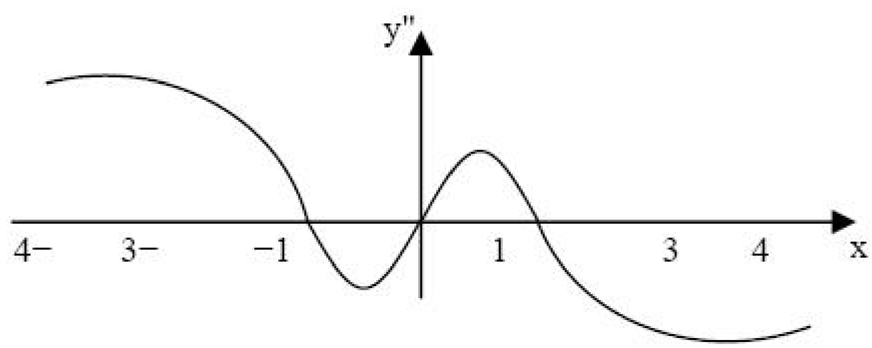
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{10^2\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot ...18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 9} > 4^9}$$

הוכחנו.

א. נשרטט את הגרף של $f(x)$ ומתחתיו את $f'(x)$ ומתחתיו את $f''(x)$ ונסביר בהמשך:







עבור $x=-1$ $f'(x)$ עוברת מעלייה לירידה, לכן הנגזרת שלה $f''(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות

עבור $f'(x)$ $x=0$ עוברת מירידה לעלייה, לכן הנגזרת שלה $f''(x)$ עוברת משליליות לחיוביות

עבור $x=1$ $f'(x)$ עוברת מעלייה לירידה, לכן הנגזרת שלה $f''(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות

ב. (1) כאשר פונקציה עולה הנגזרת שלה חיובית, וכאשר יורדת הנגזרת שלה שלילית.

ובהתאם אם $f'(x)>0$ עבור $-3<x<3$, אז בתחום זה $f(x)$ עולה.

אם $g'(x)<0$ עבור $3<x<4$ או $-4<x<-3$, אז בתחום זה $f(x)$ יורדת.

לכן נקבל $x=-3$ מינימום ($f(x)$ עוברת מירידה לעלייה),

ו- $x=3$ מקסימום ($f(x)$ עוברת מעלייה לירידה).

כיוון שהתחום סגור, אז קיימות גם נקודות קיצון בקצה, בהתאם לתחומי העלייה והירידה:

לכן נקבל $x=-4$ מקסימום ($f(x)$ יורדת ממנו),

ו- $x=4$ מינימום ($f(x)$ יורדת אליו).

על פי ההסבר והציור בסעיף הקודם:

$f''(x)$ חיובית עבור $-4<x<-1$ או $0<x<1$ ואלו תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$

$f''(x)$ שלילית עבור $-1<x<0$ או $0<x<4$ ואלו תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$,

ובהתאם $x=-1,0,1$ שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של $g(x)$.

(2) הסקיצה מופיעה כבר בתחילת התרגיל, תוך התחשבות גם בנתונים: $f(-3)=0$, $f(4)>0$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$

(1) מכנה הפונקציה חיובי, אולם הביטוי בשורש צריך להיות אי-שלילי.

תשובה: $x \ge 0$

(2) נבדוק אסימפטוטה אופקית עבור הכיוון החיובי של ציר ה- x **(כאשר** $x \ge 0$ **).**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^{0.5}}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^{0.5}}{x^{0.5}}}{\frac{x^2}{x^{0.5}}+\frac{3}{x^{0.5}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^{1.5}}=0 \quad \to y=0$$

תשובה: $y=0$

(3) $(0,0) \leftarrow$ $f(0)=\frac{4\sqrt{0}}{0^2+3}=1$ **מינימום קצה, שכן הפונקציה חיובית לכל** $x \ge 0$ **.**

נבדוק שיעורי נקודות קיצון פנימיות

$$f'(x)=4\cdot\frac{\frac{x^2+3}{2\sqrt{x}}-2x\sqrt{x}}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=4\cdot\frac{x^2+3-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2+3)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4(3-3x^2)}{2\sqrt{x}(x^2+3)^2}}$$

מונה הנגזרת מתאפס, בתחום ההגדרה, עבור $x=1$

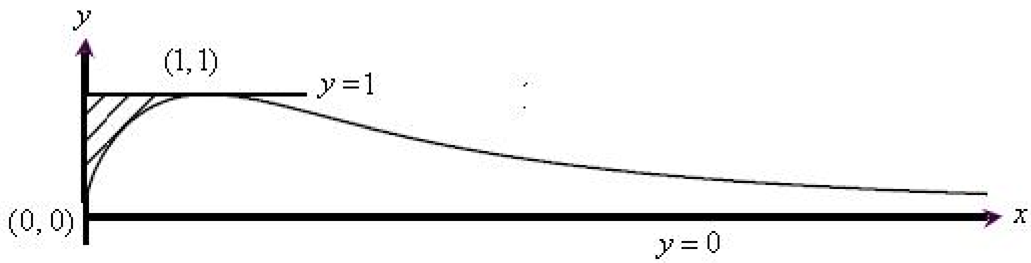
הנקודה החשודה כקיצון היא $(1,1) \leftarrow$ $f(1)=\frac{4\sqrt{1}}{1^2+3}=1$

כיוון שהפונקציה עולה מהראשית לנקודה זו, ויורדת לכיוון האסימפטוטה האופקית,

זו נקודת מקסימום פנימית.

תשובה: $(0,0)$ **מינימום קצה ,** $(1,1)$ **מקסימום פנימי ומוחלט.**

ב. נצייר את הסקיצה, לרבות המשיק בנקודת המקסימום, שהוא הישר $y=1$ וסימון השטח המסתובב:



ג. יש לחשב נפח של גוף סיבוב:

$$V = ® \int_0^1 1^2\ dx - ® \int_0^1 (\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3})^2\ dx$$

$$V = ® \int_0^1 (1 - \frac{16x}{x^2+3})\ dx$$

נשתמש באינטגרל על-ידי הצבה

נסמן: $u(x) = x^2 + 3$ **, לכן:** $\frac{du}{dx} = 2x$ **ובהתאם:** $x\ dx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{16x}{(x^2+3)^2}\ dx =$$

$$= \int \frac{16}{2u^2}\ du =$$

$$= -\frac{8}{u} + c$$

$$= -\frac{8}{x^2+3} + c$$

נחשב את הנפח הנדרש:

$$V = ® (x + \frac{8}{x^2+3})\Big]_0^1$$

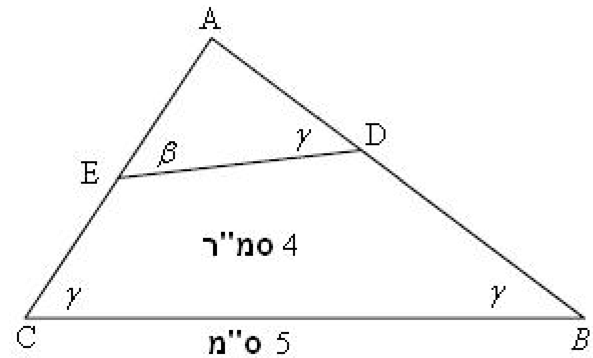
$$V = ® ((1 + \frac{8}{1^2+3}) - (0 + \frac{8}{0^2+3}))$$

$$V = ® ((3) - (2\frac{2}{3}))$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3}®}$$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $\frac{1}{3}®$.

נעלה את השרטוט המעודכן והסברים בהמשך:



<u>ניתוח נתונים וחישובי זוויות</u>

$\angle ADE = \angle C =$ ¥

$\angle AED = \angle B =$

בהתאם: $\Delta AED \sim \Delta ABC$ **(משפט דמיון ז. ז.)**

$(\frac{DE}{BC})^2 = \frac{S\Delta AED}{S\Delta ABC}$ **(יחסי שטחים של משולשים דומים שווים לריבוע יחסי הצלעות המתאימות)**

שטח המרובע BCED **הוא** 4 **סמ"ר**.

$$\frac{DE^2}{25} = \frac{S\Delta ABC - 4}{S\Delta ABC}$$

נחשב את שטח משולש ABC :

$$S\Delta ABC = \frac{5^2 \sin\ \ \sin¥}{2\sin(180° - (\ \ + ¥))}$$

$$S\Delta ABC = \frac{25\sin\ \ \sin¥}{2\sin(\ \ + ¥)} \quad \leftarrow \sin x = \sin(180° - x)$$

נציב ונחשב את DE **:**

$$\frac{DE^2}{25}=\frac{\frac{25\sin\quad\sin ¥}{2\sin(\quad+¥)}-4}{\frac{25\sin\quad\sin ¥}{2\sin(\quad+¥)}}$$

$$\frac{DE^2}{25}=\frac{\frac{25\sin\quad\sin ¥-8\sin(\quad+¥)}{2\sin(\quad+¥)}}{\frac{25\sin\quad\sin ¥}{2\sin(\quad+¥)}}$$

$$DE^2=\frac{25\sin\quad\sin ¥-8\sin(\quad+¥)}{\sin\quad\sin ¥}$$

$$DE^2=\frac{25\sin\quad\sin ¥-8(\sin\quad\cos ¥+\cos\quad\sin ¥)}{\sin\quad\sin ¥}\qquad :\sin\quad\sin ¥\neq 0$$

$$DE^2=25-8\cdot(\frac{\cos ¥}{\sin ¥}+\frac{\cos}{\sin})$$

$$DE^2=25-8\cdot(\frac{1}{tg¥}+\frac{1}{tg})$$

$$\boxed{DE=\sqrt{25-8(\frac{1}{tg}+\frac{1}{tg¥})}}$$

הוכחנו.