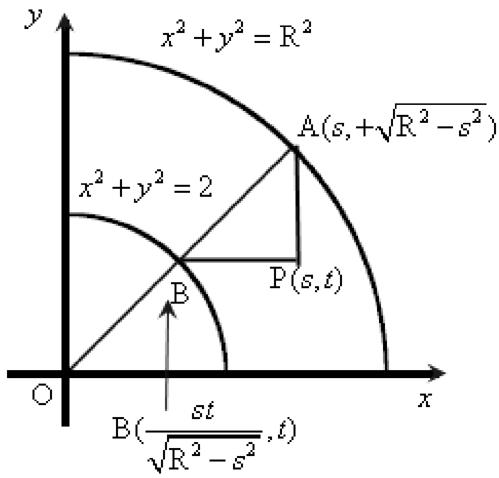
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $P(s,t)$ **- נקודה על המקום הגיאומטרי.**

דרך הנקודה A **העבירו ישר המקביל לציר ה-** y **, לכן** $x_A=x_P=s$

הנקודה A **נמצאת על רבע המעגל** $x^2+y^2=R^2$ **ולכן שיעוריה** $A(s,+\sqrt{R^2-s^2})$

הישר AO **עובר בראשית הצירים ובהתאם משוואתו:** $y=\frac{\sqrt{R^2-s^2}}{s}x$

דרך הנקודה B **העבירו ישר המקביל לציר ה-** x **, ולכן** $y_P=y_P=t$ **.**

נמצא את שיעור ה- x **של הנקודה** B **הנמצאת על הישר** AO **:**

$$t=\frac{\sqrt{R^2-s^2}}{s}x \quad \to x=\frac{st}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

ובהתאם שיעורי הנקודה $B(\frac{st}{\sqrt{R^2-s^2}},t)$ **.**

הנקודה B **נמצאת על המעגל** $x^2+y^2=2$ **ולכן נציב את שיעוריה במשוואת המעגל:**

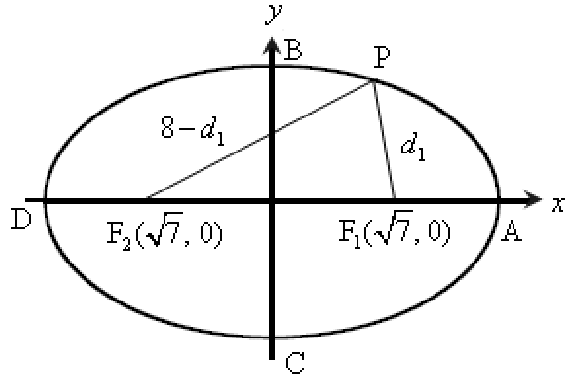
$$\frac{s^2t^2}{R^2-s^2}+t^2=2 \quad \to s^2t^2+R^2t^2-s^2t^2=2R^2-2s^2$$
$$2s^2+R^2t^2=2R^2$$
$$\frac{s^2}{R^2}+\frac{t^2}{2}=1$$

ומשוואת המקום הגיאומטרי היא האליפסה $(x,y>0)$ $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{2}=1$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $(x,y>0)$ $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{2}=1$

ב. המקום הגיאומטרי הוא אליפסה ברביע הראשון . $(a=R,\quad b=\sqrt{2},\quad F_1(\sqrt{R^2-2},0)\quad)$

א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נתון כי $F_2(-c,0)$ $\quad B(0,3)$ **.**

AO **הוא גובה ותיכון במשולש** BAC **.**

ובהתאם משולש BAC **הוא שווה שוקיים, כאשר** AO **הוא גם חוצה זווית הראש.**

נשתמש בנוסחה של הזווית הכפולה: $tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2a}$ **.**

$$\frac{24}{7}=\frac{2tga}{1-tg^2a}$$

$$24tg^2a+14tga-24=0$$

$$(tga)_{1,2}=\frac{-14\pm 50}{48}\quad\to tga=0.75\quad\leftarrow a<90^\circ$$

כיוון ששיעורי נקודות החיתוך של האליפסה עם הצירים הינם: $B(0,b)$, $\quad A(a,0)$ **.**

נקבל את המשוואה: $\frac{b}{a}=0.75$ **.**

אחד ממוקדי האליפסה נמצא בנקודה $(\sqrt{7},0)$**, כלומר** $c=\sqrt{7}$ **.**

באליפסה: $a^2-b^2=c^2$ **ונקבל את המשוואה השנייה:** $a^2-b^2=7$ **.**

נפתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} b=0.75a \\ a^2-b^2=7 \end{cases}$$

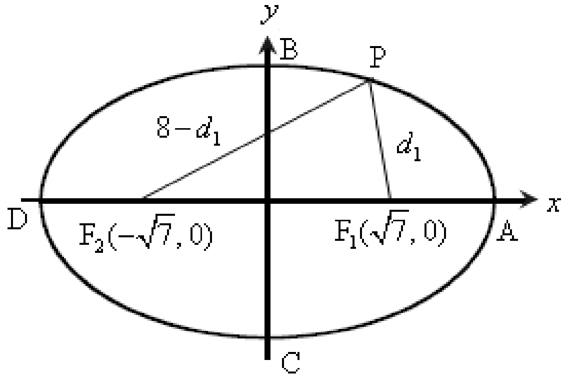
$$a^2-(0.75a)^2=7$$

$$a=4\quad\to\quad b=3$$

ומשוואת האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ **.**

ב. נקודה P היא נקודה כלשהי על האליפסה.



אליפסה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא קבוע.

סכום מרחקים זה הוא $2a$ והנקודות הם מוקדי האליפסה: $F_1(c,0),\quad F_2(-c,0)$.

לכן: $d_1+d_2=8$ ובהתאם המרחקים הם: $d_1, 8-d_1$.

נמצא האם משפט פיתגורס אפשרי במשולש F_1PF_2, כאשר $\angle F_1PF_2=90°$.

$$d_1^2+(8-d_1)^2=(2\sqrt{7})^2$$
$$d_1^2+64-16d_1+d_1^2=28$$
$$2d_1^2-16d_1+36=0$$

מתקבל ש: $\Delta<0$ ולכן אין פתרון $\angle F_1PF_2\neq 90°$.

הוכחנו.

<u>דרך חלופית לפתרון:</u>

אם $\angle F_1PF_2=90°$ אז P נמצאת על מעגל שקוטרו $2\sqrt{7}$ ומרכזו בראשית הצירים: $x^2+y^2=28$

רדיוס המעגל $\sqrt{7}$ קטן מ- 3, כאשר שיעורי הנקודה $B(0,3)$

ולכן הנקודה P שעל האליפסה הקנונית לא יכולה להיות על המעגל.

א. נתון כי $DC=4$ **,** $AD=3$ **,** $AA'=m$ **, כאשר מקצועות התיבה מונחים על הצירים.**

ניתן למצוא את שיעורי הנקודות: $A(3,0,0),\quad C(0,4,0),\quad B'(3,4,m)$

$$\overrightarrow{AB'}=\underline{B'}-\underline{A}$$
$$\overrightarrow{AB}=\underline{x}=(0\,,4\,,m)$$
$$\overrightarrow{AC}=\underline{C}-\underline{A}$$
$$\overrightarrow{AC}=\underline{x}=(-3\,,4\,,0)$$

הצגה פרמטרית של המישור הנתון:

$$\pi:\underline{x}=(3,0,0)+t(0\,,4\,,m)+s(-3\,,4\,,0)\,,$$

נעבור למשוואת המישור באמצעות חישוב דטרמיננטה,

אשר שווה ל- 0 **, כי השורה הראשונה תלויה בשתי האחרות.**

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ x-3 & y-0 & z-0 \\ 0 & 4 & m \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-3)(0-4m)-y(0-(-3m))+z(0-(-12)=0$$
$$-4mx+12m-3my+12z=0$$
$$\boxed{4mx+3my-12z-12m=0}$$

תשובה: משוואת המישור היא $4mx+3my-12z-12m=0$

ב. לשתי הפירמידות $D'ACB'$ **ו-** $BACB'$ **יש בסיס משותף** ACB' **.**

לכן יחס הנפחים הוא יחס הגבהים,

שהוא היחס בין מרחקי הנקודות D' **ו-** B **מבסיס זה.**

$$\frac{V_{D'ACB'}}{V_{BACB'}}=\frac{d_{D'p}}{d_{Bp}}=\frac{\frac{|4m\cdot 0+3m\cdot 0-12m-12m|}{\sqrt{(4m)^2+(3m)^2+12^2}}}{\frac{|4m\cdot 3+3m\cdot 4-12\cdot 0-12m|}{\sqrt{(4m)^2+(3m)^2+12^2}}}=\frac{24m}{12m}=2$$

תשובה: היחס בין נפח הפירמידה $D'ACB'$ **לנפח הפירמידה** $BACB'$ **הוא** 2 **.**

ג. המקצוע BB' **מקביל לציר ה-** z **ולכן הווקטור המייצג אותו הוא** $\underline{x}=(0,0,1)$ **.**

נשתמש בנוסחה לזווית בין ישר למישור:

$$\frac{|(0,0,1)(4m,3m,12)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{(4m)^2+(3m)^2+12^2}}=\sin 30°$$

$$\frac{12}{\sqrt{1}\sqrt{25m^2+144}}=0.5$$

$$24=\sqrt{25m^2+144}\quad ()^2$$

$$576=25m^2+144$$

$$m^2=17.28$$

$$\boxed{m=4.16}\quad \leftarrow m>0$$

שני האגפים, בעת ההעלאה בריבוע חיוביים (כולל הביטוי שבשורש) - לכן לא נכנסו פתרונות זרים.

תשובה: $m=4.16$

יש לפתור את האי-שוויון: $\left|2+3^{x^2-x-1}-12i\right|>13$

הערך המוחלט של מספר מרוכב $z=a+bi$ **הוא** $\sqrt{x^2+b^2}$

$$\sqrt{(2+3^{x^2-x-1})^2+12^2}>13 \quad ()^2$$

$$(2+3^{x^2-x-1})^2+144>169$$

שני האגפים חיוביים, כולל הביטוי שבשורש, לכן לא הוכנסו פתרונות זרים.

$$(2+3^{x^2-x-1})^2>25$$

$$2+3^{x^2-x-1}>5$$

האפשרות השנייה $2+3^{x^2-x-1}<-5$ **נפסלת כי אגף שמאל חיובי.**

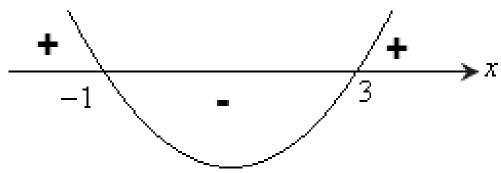
$$3^{x^2-x-1}>3$$

הבסיס גדול מ- 1 **לכן** 3^x **פונקציה עולה**

$$x^2-x-1>1$$

$$x^2-x-2>0$$

$$(x-2)(x+1)>0$$



ובהתאם לציור המתאים, נקבל $x>3$ **או** $x<-1$

תשובה: $x>3$ **או** $x<-1$

המספר המרוכב: z **נמצא על מעגל היחידה**

נסמן: $z = a+bi$ **ולכן** $-1 \le a \le 1$

$$t = z + \overline{z}$$
$$t = a+bi+a-bi$$
$$t = 2a$$

ובהתאם לתחום בו נמצאים ערכי a **:** $-2 \le t \le 2$

תשובה: $-2 \le t \le 2$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}+4e^x+3}{(e^x-3)^2}$

נמצא את תחום ההגדרה:

$(e^x-3)^2 \neq 0$

$e^x-3 \neq 0$

$e^x \neq 3$

$\boxed{x \neq \ln 3}$

תשובה: $x \neq \ln 3$

ב. נמצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים:

$x=\ln 3$ **מאפס מכנה של הפונקציה ולא מונה, לכן הישר** $x=\ln 3$ **הוא אסימפטוטה אנכית.**

x	10	15	20	–10	–15	–20
y	1.0045	1.000003	1.00000002	0.33337	0.3333336	0.333333334

ובהתאם הישרים $y=1$ **,** $y=\frac{1}{3}$ **מהווים אסימפטוטות אופקיות**

תשובה: $x=\ln 3$ **,** $y=1$, $y=\frac{1}{3}$

ג. נמצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים:

קל לראות שהפונקציה חיובית לכל x **(גם המונה וגם המכנה חיוביים תמיד), לכן אין חיתוך עם ציר** x **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן** $f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}+4e^0+3}{(e^0-3)^2}=\frac{8}{4}=2$ **:**

תשובה: $(0,2)$**.**

ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f(x)=\frac{e^{2x}+4e^{x}+3}{(e^{x}-3)^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{(2e^{2x}+4e^{x})(e^{x}-3)^{2}-2e^{x}(e^{x}-3)(e^{2x}+4e^{x}+3)}{(e^{x}-3)^{4}}$$

$$f'(x)=\frac{(e^{x}-3)[(2e^{2x}+4e^{x})(e^{x}-3)-2e^{x}(e^{2x}+4e^{x}+3)]}{(e^{x}-3)^{4}}$$

$$f'(x)=\frac{(e^{x}-3)(2e^{3x}-6e^{2x}+4e^{2x}-12e^{x}-2e^{3x}-8e^{2x}-6e^{x})}{(e^{x}-3)^{4}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(e^{x}-3)((-14e^{2x}-18e^{x})}{(e^{x}-3)^{4}}}$$

קל לראות שהכופל הימני במונה שלילי, ושהמכנה חיובי.

כאשר $e^{x}>3$ **, כלומר כאשר** $x>\ln 3$ **הכופל השמאלי במונה חיובי.**

לכן, בהתחשב בסימן השלילי של הכופל הימני – נקבל:

ירידה - $x>\ln 3$, **עלייה** $x<\ln 3$

ה. בהתאם גרף הפונקציה, שכאמור חיובית לכל x **:**