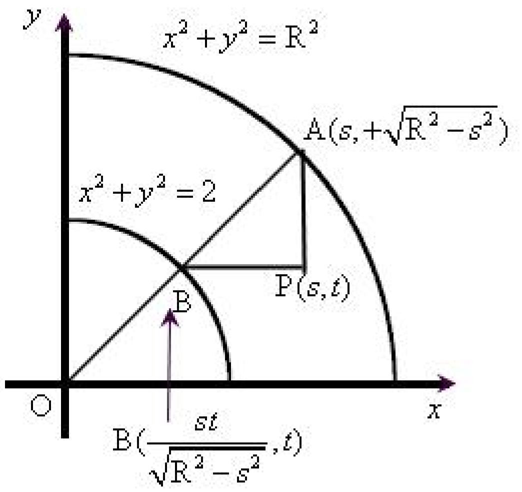
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $\mathrm{P}(s,t)$ - נקודה על המקום הגיאומטרי.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- y , לכן $x_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{P}}=s$

הנקודה A נמצאת על רבע המעגל $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$ ולכן שיעוריה $\mathrm{A}(s,+\sqrt{\mathrm{R}^2-s^2})$

הישר AO עובר בראשית הצירים ובהתאם משוואתו: $y=\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2-s^2}}{s}x$

דרך הנקודה B העבירו ישר המקביל לציר ה- x , ולכן $y_{\mathrm{P}}=y_{\mathrm{P}}=t$.

נמצא את שיעור ה- x של הנקודה B הנמצאת על הישר AO :

$$t=\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2-s^2}}{s}x \quad \rightarrow x=\frac{st}{\sqrt{\mathrm{R}^2-s^2}}$$

ובהתאם שיעורי הנקודה $\mathrm{B}(\frac{st}{\sqrt{\mathrm{R}^2-s^2}},t)$.

הנקודה B נמצאת על המעגל $x^2+y^2=2$ ולכן נציב את שיעוריה במשוואת המעגל:

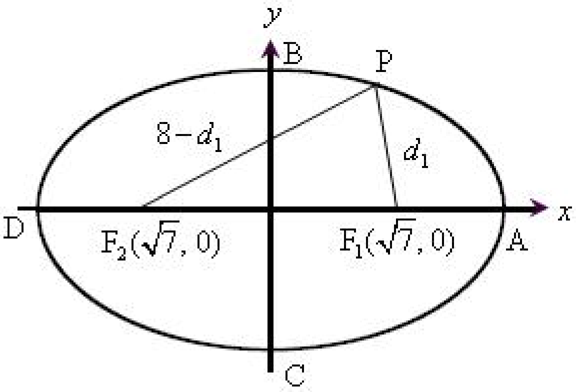
$$\frac{s^2t^2}{\mathrm{R}^2-s^2}+t^2=2 \quad \rightarrow s^2t^2+\mathrm{R}^2t^2-s^2t^2=2\mathrm{R}^2-2s^2$$
$$2s^2+\mathrm{R}^2t^2=2\mathrm{R}^2$$
$$\frac{s^2}{\mathrm{R}^2}+\frac{t^2}{2}=1$$

ומשוואת המקום הגיאומטרי היא האליפסה $(x,y>0)$ $\frac{x^2}{\mathrm{R}^2}+\frac{y^2}{2}=1$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $(x,y>0)$ $\frac{x^2}{\mathrm{R}^2}+\frac{y^2}{2}=1$

ב. המקום הגיאומטרי הוא אליפסה ברביע הראשון . $(a=\mathrm{R}, \quad b=\sqrt{2}, \quad \mathrm{F}_1(\sqrt{\mathrm{R}^2-2},0) \quad)$

א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נתון כי $B(0,3),\quad F_2(-c,0)$.

AO הוא גובה ותיכון במשולש BAC .

ובהתאם משולש BAC הוא שווה שוקיים, כאשר AO הוא גם חוצה זווית הראש.

נתון כי $tg\sphericalangle BAC=\frac{24}{7}$ ולכן $\sphericalangle BAC=73.739795°$ ובהתאם $\sphericalangle BAO=36.86989765°$.

במשולש CAO מתקיים $tg\sphericalangle BAO=\frac{BO}{AO}$ ונקבל $\frac{BO}{AO}=\frac{3}{4}$.

כיוון ששיעורי נקודות החיתוך של האליפסה עם הצירים הינם: $A(a,0),\quad B(0,b)$.

נקבל את המשוואה: $\frac{b}{a}=0.75$.

אחד ממוקדי האליפסה נמצא בנקודה $(\sqrt{7},0)$, כלומר $c=\sqrt{7}$.

באליפסה: $a^2-b^2=c^2$ ונקבל את המשוואה השנייה: $a^2-b^2=7$.

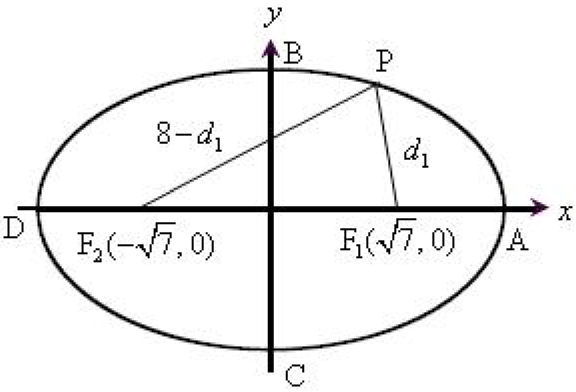
נפתור את מערכת המשוואות: $\begin{cases} b=0.75a \\ a^2-b^2=7 \end{cases}$

$$a^2-(0.75a)^2=7$$
$$a=4 \quad \rightarrow \quad b=3$$

ומשוואת האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

ב. נקודה P היא נקודה כלשהי על האליפסה.



אליפסה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא קבוע.

סכום מרחקים זה הוא $2a$ **והנקודות הם מוקדי האליפסה:** $F_1(c,0),\quad F_2(-c,0)$ **.**

לכן: $d_1+d_2=8$ **ובהתאם המרחקים הם:** $d_1, 8-d_1$ **.**

נמצא האם משפט פיתגורס אפשרי במשולש F_1PF_2 **, כאשר** $\angle F_1PF_2=90^\circ$ **.**

$$d_1^2+(8-d_1)^2=(2\sqrt{7})^2$$
$$d_1^2+64-16d_1+d_1^2=28$$
$$2d_1^2-16d_1+36=0$$

מתקבל ש: $\Delta<0$ **ולכן אין פתרון** $\angle F_1PF_2\neq 90^\circ$ **.**

הוכחנו.

דרך חלופית לפתרון:

אם $\angle F_1PF_2=90^\circ$ **אז** P **נמצאת על מעגל שקוטרו** $2\sqrt{7}$ **ומרכזו בראשית הצירים:** $x^2+y^2=28$

רדיוס המעגל $\sqrt{7}$ **קטן מ-** 3 **, כאשר שיעורי הנקודה** $B(0,3)$

ולכן הנקודה P **שעל האליפסה הקנונית** ***לא*** **יכולה להיות על המעגל.**

א. נתון כי $DC = 4$ **,** $AD = 3$ **,** $AA' = m$, **כאשר מקצועות התיבה מונחים על הצירים.**

ניתן למצוא את שיעורי הנקודות: $B'(3, 4, m)$, $C(0, 4, 0)$, $A(3, 0, 0)$

$$\overrightarrow{AB'} = \underline{B'} - \underline{A}$$
$$\overrightarrow{AB} = \underline{x} = (0\,,4\,,m)$$
$$\overrightarrow{AC} = \underline{C} - \underline{A}$$
$$\overrightarrow{AC} = \underline{x} = (-3\,,4\,,0)$$

הצגה פרמטרית של המישור הנתון:

$$\pi : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(0\,,4\,,m) + s(-3\,,4\,,0)\,,$$

נעבור למשוואת המישור באמצעות חישוב דטרמיננטה,

אשר שווה ל- 0 **, כי השורה הראשונה תלויה בשתי האחרות.**

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ x-3 & y-0 & z-0 \\ 0 & 4 & m \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)(0-4m) - y(0-(-3m)) + z(0-(-12) = 0$$
$$-4mx + 12m - 3my + 12z = 0$$
$$\boxed{4mx + 3my - 12z - 12m = 0}$$

תשובה: משוואת המישור היא $4mx + 3my - 12z - 12m = 0$

ב. לשתי הפירמידות $D'ACB'$ ו- $BACB'$ יש בסיס משותף ACB' .

לכן יחס הנפחים הוא יחס הגבהים,

שהוא היחס בין מרחקי הנקודות D' ו- B מבסיס זה.

$$\frac{V_{\text{D'ACB'}}}{V_{\text{BACB'}}}=\frac{d_{\text{D'®}}}{d_{\text{B®}}}=\frac{\dfrac{|4m\cdot0+3m\cdot0-12m-12m|}{\sqrt{(4m)^2+(3m)^2+12^2}}}{\dfrac{|4m\cdot3+3m\cdot4-12\cdot0-12m|}{\sqrt{(4m)^2+(3m)^2+12^2}}}=\frac{24m}{12m}=2$$

תשובה: היחס בין נפח הפירמידה $D'ACB'$ לנפח הפירמידה $BACB'$ הוא 2 .

ג. המקצוע BB' מקביל לציר ה- z ולכן הווקטור המייצג אותו הוא $\underline{x}=(0,0,1)$.

נשתמש בנוסחה לזווית בין ישר למישור:

$$\frac{|(0,0,1)(4m,3m,12)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{(4m)^2+(3m)^2+12^2}}=\sin 30^\circ$$

$$\frac{12}{\sqrt{1}\sqrt{25m^2+144}}=0.5$$

$$24=\sqrt{25m^2+144} \quad (\ )^2$$

$$576=25m^2+144$$

$$m^2=17.28$$

$$\boxed{m=4.16} \quad \leftarrow m>0$$

שני האגפים, בעת ההעלאה בריבוע חיוביים (כולל הביטוי שבשורש) - לכן *לא* נכנסו פתרונות זרים.

תשובה: $m=4.16$

יש לפתור את האי-שוויון: $\left|2+3^{x^2-x-1}-12i\right|>13$

הערך המוחלט של מספר מרוכב $z=a+bi$ **הוא** $\sqrt{x^2+b^2}$

$$\sqrt{(2+3^{x^2-x-1})^2+12^2}>13 \quad (\ )^2$$

$$(2+3^{x^2-x-1})^2+144>169$$

שני האגפים חיוביים, כולל הביטוי שבשורש, לכן *לא* הוכנסו פתרונות זרים.

$$(2+3^{x^2-x-1})^2>25$$

$$2+3^{x^2-x-1}>5$$

האפשרות השנייה $2+3^{x^2-x-1}<-5$ **נפסלת כי אגף שמאל חיובי.**

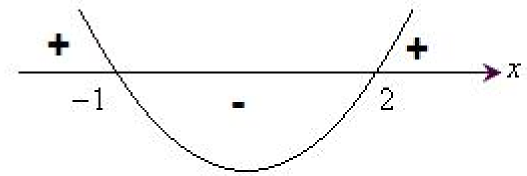
$$3^{x^2-x-1}>3$$

הבסיס גדול מ- 1 **לכן** 3^x **פונקציה עולה**

$$x^2-x-1>1$$

$$x^2-x-2>0$$

$$(x-2)(x+1)>0$$



ובהתאם לציור המתאים, נקבל $x>2$ **או** $x<-1$

תשובה: $x>2$ **או** $x<-1$

המספר המרוכב: z **נמצא על מעגל היחידה**

נסמן: $z=a+bi$ **ולכן** $-1\le a\le 1$

$$t=z+\overline{z}$$
$$t=a+bi+a-bi$$
$$t=2a$$

ובהתאם לתחום בו נמצאים ערכי a **:** $-2\le t\le 2$

תשובה: $-2\le t\le 2$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}+4e^{x}+3}{(e^{x}-3)^{2}}$

נמצא את תחום ההגדרה:

$$(e^{x}-3)^{2}\neq 0$$

$$e^{x}-3\neq 0$$

$$e^{x}\neq 3$$

$$\boxed{x\neq \ln 3}$$

תשובה: $x\neq \ln 3$

ב. נמצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים:

$x=\ln 3$ **מאפס מכנה של הפונקציה ולא מונה, לכן הישר** $x=\ln 3$ **הוא אסימפטוטה אנכית.**

-20	-15	-10	20	15	10	x
0.333333334	0.3333336	0.33337	1.00000002	1.000003	1.0045	y

ובהתאם הישרים $y=1$ **,** $y=\frac{1}{3}$ **מהווים אסימפטוטות אופקיות**

תשובה: $x=\ln 3$**,** $y=1$, $y=\frac{1}{3}$

ג. נמצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים:

קל לראות שהפונקציה חיובית לכל x **(גם המונה וגם המכנה חיוביים תמיד), לכן אין חיתוך עם ציר** x**.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן** $f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}+4e^{0}+3}{(e^{0}-3)^{2}}=\frac{8}{4}=2$ **:**

תשובה: $(0,2)$**.**

ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f(x)=\frac{e^{2x}+4e^x+3}{(e^x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2e^{2x}+4e^x)(e^x-3)^2-2e^x(e^x-3)(e^{2x}+4e^x+3)}{(e^x-3)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x-3)((2e^{2x}+4e^x)(e^x-3)-2e^x(e^{2x}+4e^x+3))}{(e^x-3)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x-3)(2e^{3x}-6e^{2x}+4e^{2x}-12e^x-2e^{3x}-8e^{2x}-6e^x)}{(e^x-3)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(e^x-3)((-10e^{2x}-18e^x)}{(e^x-3)^4}}$$

קל לראות שהכופל הימני במונה שלילי, ושהמכנה חיובי.

כאשר $e^x > 3$, כלומר כאשר $x > \ln 3$ הכופל השמאלי במונה חיובי.

לכן, בהתחשב בסימן השלילי של הכופל הימני – נקבל:

ירידה - $x > \ln 3$, **עלייה** $x < \ln 3$

ה. בהתאם גרף הפונקציה, שכאמור חיובית לכל x :