א. נתונה הפונקציה $f(x) = a\cos x + \cos^2 x + 2$ **בתחום** $-p \le x \le p$

נתון: $f'(-\frac{p}{2}) - f'(\frac{p}{2}) = 4$

$$f'(x) = -a\sin x + 2\cos x \cdot (-\sin x)$$
$$f'(x) = -a\sin x - \sin 2x$$
$$f'(-\frac{p}{2}) - f'(\frac{p}{2}) = 4$$
$$-a\sin(-\frac{p}{2}) - \sin 2(-\frac{p}{2}) - (-a\sin(-\frac{p}{2}) - \sin 2(-\frac{p}{2})) = 4$$
$$-a\cdot(-1) - 0 - (-a\cdot 1 - 0) = 4$$
$$a + a = 4$$
$$2a = 4$$
$$\boxed{a = 2}$$

תשובה: $a = 2$

בהתאם הפונקציה היא $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x + 2$

<u>**נמצא את נקודות הקיצון המוחלטות**</u>

הפונקציה מוגדרת בתחום סגור $-p \le x \le p$ **,**

ולכן נבדוק את ערכי הפונקציה בקצוות,

במטרה לסייע באיתור נקודות הקיצון המוחלט.

$$f(-p) = 2\cos(-p) + \cos^2(-p) + 2 = -2 + 1 + 2 = 1$$
$$f(p) = 2\cos(p) + \cos^2(p) + 2 = 2 = -2 + 1 + 2 = 1$$

לכן נקודות הקצה הנן: $(p, 1)$ **,** $(-p, 1)$

נמצא נקודות קיצון פנימיות:

$$\boxed{f(x) = 2\cos x + \cos^2 x + 2}$$
$$f'(x) = -2\sin x + 2\cos x \cdot (-\sin x)$$
$$\boxed{f'(x) = -2\sin x - 2\sin x\cos x}$$
$$0 = -2\sin x - 2\sin x\cos x$$
$$0 = 2\sin x(1 - \cos x)$$
$$\sin x = 0 \qquad \cos 2x = 1$$
$$\boxed{x = pk} \qquad 2x = 2pk$$
$$\boxed{x = pk}$$

עבור $k = 0$ **נקבל נקודת קיצון פנימית, שבה** $x = 0$

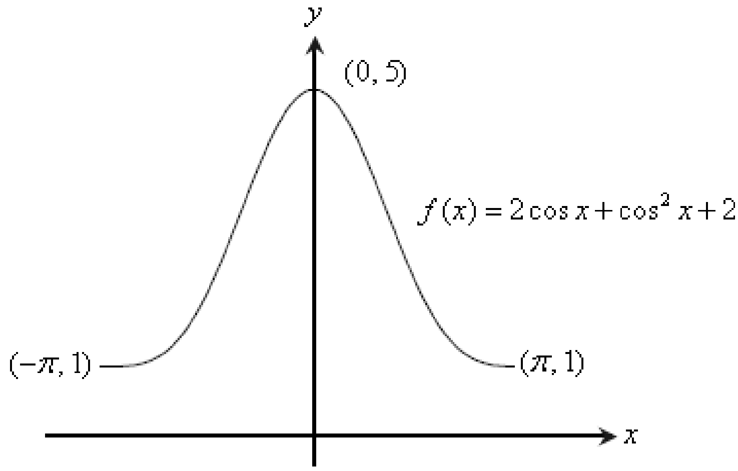
$$f(0) = 2\cos(0) + \cos^2(0) + 2 = 2 + 1 + 2 = 5$$

כלומר $(0, 5)$ **חשודה כקיצון**

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (בעזרת ערכי הפונקציה)

x	p		0		$-p$
y	1		5		1
מסקנה	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**

ניעזר גם בגרף פונקציה למתן התשובה הסופית, של נקודות הקיצון <u>המוחלט</u>:



תשובה:מינימום מוחלט $(p,1)$ **,** $(-p,1)$ **, מקסימום מוחלט** $(0,5)$

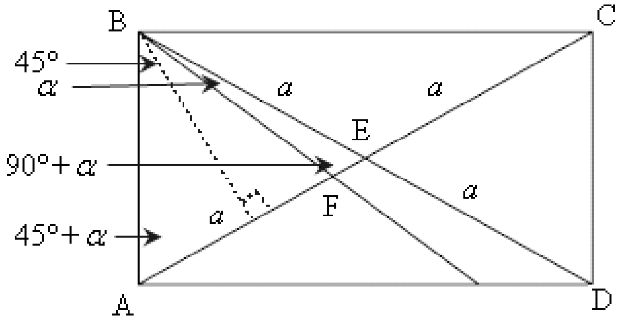
ג. על פי הנתון $f'(-\frac{p}{2})-f'(\frac{p}{2})=4$

כלומר השיפועים של המשיקים בנקודות, שבהן $x=\frac{p}{2}$ **או** $x=-\frac{p}{2}$ **אינם שווים.**

אחרת, היה הפרש הנגזרות 0 **.**

תשובה: המשיקים נחתכים.

א. (1) נציג את הסרטוט המעודכן ונסביר בהמשך:



$\angle ABC = 90°$ **(זוויות המלבן ישרות)**

$\angle ABF = 45°$ **(BF חוצה זווית)**

$\angle FBE = a$ **(נתון)**

$\angle ABE = 45° + a$ **(סכום זוויות)**

$\angle BAE = 45° + a$ **(מול צלעות שוות מונחות זוויות זוות ΔABE, אלכסוני המלבן שווים וחוצים זה את זה)**

$\angle BFE = 90° + a$ **(זווית חיצוניית שווה לסכום שתי זוויות פנימיו שלא צמודות לה ΔABF)**

תשובה: $\angle BAE = 45° + a$ **,** $\angle BFE = 90° + a$

(2) $AC = 2a$ **, לכן** $AE = a$ **(אלכסוני המלבן חוצים זה את זה)**

ניעזר במשפט סינוסים

$\underline{\Delta AFE}$

$$\frac{FE}{\sin a} = \frac{a}{\sin(90° + a)}$$

$$FE = \frac{a \sin a}{\cos a} \quad \leftarrow \sin(90° + a) = \cos a$$

$$\boxed{FE = a \tan a}$$

תשובה: $FE = a \tan a$

ב. היחס בין שטח המשולש BFE **לשטח המשולש** BEC **הוא** $\frac{1}{2}$

לשני המשולשים גובה משותף, בהתאמה, לצלעות FE **ו-** EC **(ראה ציור).**

לכן:

$$\frac{1}{2} = \frac{FE}{EC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a \tan a}{a}$$

$$\boxed{a = 26.565°}$$

תשובה: $a = 26.565°$

א. $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-12}{2x^2}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$x^2\neq 0$$
$$\boxed{x\neq 0}$$

תשובה: $x\neq 0$

(2) אסימפטוטה אנכית

$x=0$ **מאפס את המכנה אך לא את מונה הפונקציה.**

<u>אסימפטוטה אופקית</u>: מעלת פולינום מונה (2) **שווה למעלת פולינום מכנה** (2) **,**

לכן $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+4x-12}{2x^2}=-\dfrac{1}{2}$

תשובה: $x=0$ **,** $y=-\dfrac{1}{2}$

(3) נקודת קיצון וסוגה:

$$f'(x)=\frac{(-2x+4)\cdot x^2-2x\cdot(-x^2+4x-12)}{2x^4}$$
$$f'(x)=\frac{-2x^3+4x^2+2x^3-8x^2+24x}{2x^4}$$
$$f'(x)=\frac{2x(-x^2+2-9+x^2)}{(x^2-2)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{-4x^2+24x}{2x^4}}$$
$$0=\frac{-4x^2+24x}{2x^4}$$
$$0=4x(-x+6)$$
$$x=6\quad\rightarrow f(6)=\frac{-6^2+4\cdot 6-12}{2\cdot 6^2}=-\frac{1}{3}\quad\rightarrow(6,-\frac{1}{3})$$

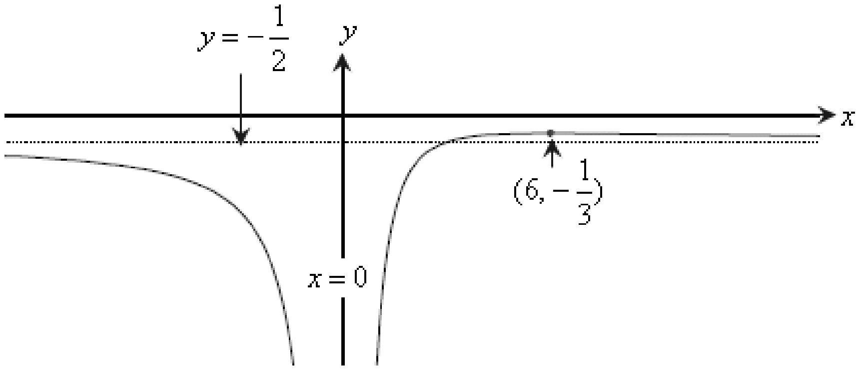
נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון, ותחומי עלייה וירידה (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(-1)=-4\cdot(-1)^2+24\cdot(-1)<0$$
$$f'(1)=-4\cdot 1^2+24\cdot 1>0$$
$$f'(7)=-4\cdot 7^2+24\cdot 7<0$$

	0		6		x
-			0		y
↘		↗	**Max**	↘	**מסקנה**

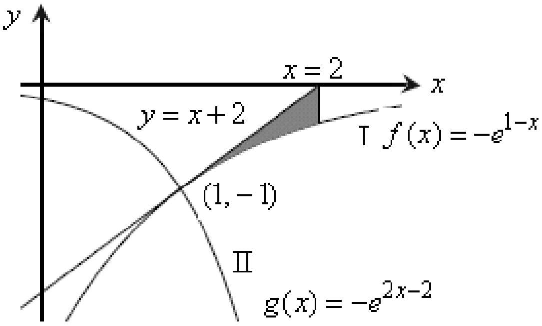
תשובה: $(6,-\dfrac{1}{3})$ **מקסימום.**

ב. <u>הסקיצה המתאימה</u>



ג. <u>אין פתרון למשוואה</u> $f(x)=0$, שכן $-\frac{1}{3}$ הוא הערך המקסימלי של הפונקציה, ראה ציור.

א. נעלה ציור מעודכן ונסביר בהמשך:



נתונה הפונקציה $f(x)=-e^{1-x}$ **, שנגזרתה** $f'(x)=e^{1-x}$ **חיובית לכל** x **,ולכן הגרף עולה ומתאים לעקומה** I **.**

נתונה הפונקציה $g(x)=-e^{2x-2}$ **, שנגזרתה** $g'(x)=-2e^{2x-2}$ **שלילית לכל** x **,**

ולכן הגרף יורד ומתאים לעקומה II **.**

תשובה: I **-** $f(x)=-e^{1-x}$, II **-** $g(x)=-e^{2x-2}$

ב. נמצא את נקודת החיתוך שבין שתי הפונקציות:

$$\begin{cases} f(x)=-e^{1-x} \\ g(x)=-e^{2x-2} \end{cases}$$

$$-e^{1-x}=-e^{2x-2}$$

$$e^{1-x}=e^{2x-2}$$

$$1-x=2x-2$$

$$-3x=-3 \quad /:(-3)$$

$$x=1 \quad \rightarrow y=-e^{1-1}=-1$$

ושיעורי נקודת החיתוך הם: $(1,-1)$

נמצא את שיפוע המשיק: $f'(1)=e^{1-1}=1 \quad \rightarrow m=1$

נמצא את משוואת המשיק: $y+1=1(x-1) \quad \rightarrow y=x-2$

$$S=\int_1^2 (x-2+e^{1-x})dx$$

$$S=-\frac{x^2}{2}-2x-e^{1-x}\Big]_1^2$$

$$S=(\frac{2^2}{2}-2\cdot 2-e^{1-2})-(\frac{1^2}{2}-2\cdot 1-e^{1-1})$$

$$S=(-2-\frac{1}{e})-(-2.5)$$

$$\boxed{S=0.5-\frac{1}{e}}$$

תשובה: גודל השטח הוא $0.5-\frac{1}{e}$ **יח"ר.**

א. נמצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של שתי הפונקציות:

$$\begin{cases} y = \frac{\ln x}{2} \\ y = (\ln x)^2 - 3, \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\ln x}{2} = (\ln x)^2 - 3 \quad \boxed{\ln x = t}$$

$$\frac{t}{2} = t^2 - 3 \quad / \cdot 2$$

$$t = 2t^2 - 6$$

$$2t^2 - t - 6 = 0$$

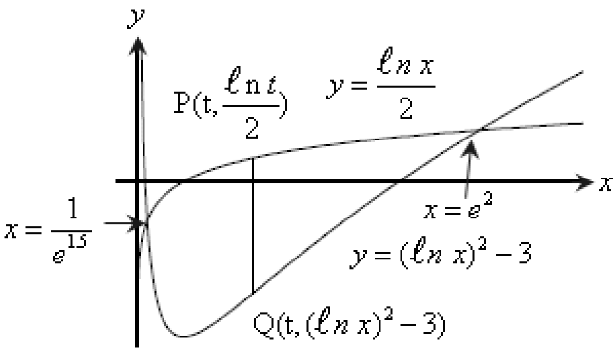
$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \rightarrow \ln x = 2 \quad \rightarrow x = e^2$$

$$t_2 = \frac{1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -1.5 \quad \rightarrow \ln x = -1.5 \quad \rightarrow x = e^{-1.5} = \frac{1}{e^{1.5}}$$

תשובה: $x = e^2$, $x = \frac{1}{e^{1.5}}$

נעלה ציור מעודכן, ונסביר בהמשך:



ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *אורך הקטע* PQ.

נזהה את הפונקציות באמצעות הצבת $x=1$,

הנמצא בין שתי נקודות החיתוך, בתבנית שתי הפונקציות:

$$\frac{\ln(1)}{2}=0, \quad (\ln 1)^2-3=-3$$

לכן $y=\frac{\ln x}{2}$ **היא הפונקציה העליונה, בתחום שבין שתי נקודות החיתוך.**

נסמן את הנקודה P עם השיעורים $P(t,\frac{\ln t}{2})$

מכיוון ו- PQ מקביל לציר ה- y , הרי ש- $Q(t,(\ln x)^2-3)$

ובהתאם:

$$PQ=\frac{\ln t}{2}-((\ln x)^2-3)$$

$$\boxed{PQ=\frac{\ln t}{2}-(\ln x)^2+3}$$

נמצא את נקודת הקיצון:

$$(PQ)'(t)=\frac{1}{2t}-\frac{2\ln t}{t}$$

$$\boxed{(PQ)'(t)=\frac{1-4\ln t}{2t}}$$

$$0=\frac{1-4\ln t}{2t} \quad /\cdot 2t$$

$$0=1-4\ln t$$

$$\ln t=\frac{1}{4}$$

$$t=e^{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{t=\sqrt[4]{e}}$$

מכנה הנגזרת הראשונה חיובי, בתחום ההגדרה,

לכן מספיק למצוא את סימן הנגזרת השנייה, בנקודה החשודה כקיצון

$(PQ)''(t)=-\frac{4}{t}<0 \quad \to Max$ **(הנגזרת השנייה שלילית בכל תחום ההגדרה)**

$x=\sqrt[4]{e}$ **יביא את אורך הקטע PQ למקסימום.**

תשובה: $x=\sqrt[4]{e}$ **, אורך הקטע PQ הוא מקסימלי.**