א. נסמן ב- x את מספר הברגים שמכונה I מכינה בשעה.
נסמן ב- y את כמות הברגים שמכונה II מכינה בשעה.

	מכונה	זמן (שעות)	כמות לדקה (ברגים)	סה"כ (ברגים)
חלופה ראשונה	I	30	x	$30x$
	II	30	y	$30y$
חלופה שנייה	I	9	x	$30\%\cdot 30x=9x$
	II	8	y	$26\frac{2}{3}\%\cdot 30y=8y$
חלופה שלישית	I	$\frac{20y}{x}$	x	$\frac{2}{3}\cdot 30y=20y$
	II	$\frac{9x}{y}$	y	$0.3\cdot 30x=9x$

בחלופה השנייה יכינו שתי המכונות ביחד 480 ברגים, לכן: $9x+8y=480$

בחלופה השלישית תעבוד מכונה II 3 שעות פחות ממכונה I , לכן: $\frac{20y}{x}=\frac{9x}{y}+3$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (1) \quad 9x+8y=480 \\ (2) \quad \dfrac{20y}{x}=\dfrac{9x}{y}+3 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{20y}{x}=\frac{9x}{y}+3 \qquad \boxed{t=\frac{y}{x}}$$

$$\Leftrightarrow 20t=\frac{9}{t}+3 \quad / \cdot t$$

$$\Leftrightarrow 20t^2-3t+9=0$$

$$\Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{3\pm 27}{40}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{3}{4} \quad \leftarrow t>0 \quad \leftarrow x,\, y>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{3}{4} \quad \rightarrow \boxed{y=0.75x}$$

$$(1) \quad 9x+8y=480$$

$$\Leftrightarrow 9x+8\cdot 0.75x=480$$

$$\Leftrightarrow 15x=480$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=32} \quad \rightarrow \boxed{y=24}$$

תשובה: מכונה I **מייצרת** 32 **ברגים בשעה, ומכונה** II **מייצרת** 24 **ברגים בשעה.**

(נשים לב לכך ש: $a_1=1-\frac{1}{1^2}=0$, *לא משמעותי להמשך התרגיל, כאשר בוטל סעיף ב.)*

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{2\cdot 1+1}{2\cdot 2+2}=\frac{3}{4}$ **אגף שמאל:** $a_2=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot a_{k+3}\cdot \ldots \cdot a_{2k}=\frac{2k+1}{2k+2}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, לכן צ"ל

$$a_{k+2}\cdot a_{k+3}\cdot a_{k+4}\cdot \ldots \cdot a_{2k}\cdot a_{2k+1}\cdot a_{2k+2}=\frac{2(k+1)+1}{2(k+1)+2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot a_{k+3}\cdot a_{k+4}\cdot \ldots \cdot a_{2k}}\cdot a_{2k+1}\cdot \frac{a_{2k+2}}{a_{k+1}}==\frac{2k+3}{2k+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k+2}\cdot\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)+\frac{\left(1-\frac{1}{(2k+2)^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)}=\frac{2k+3}{2k+4}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{4k^2+4k}{(2k+1)^2}\cdot\frac{\frac{4k^2+8k+3}{4(k+1)^2}}{\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}}=\frac{2k+3}{2k+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+1}{2(k+1)}\cdot\frac{4k(k+1)}{(2k+1)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+3)}{4k(k+2)}=\frac{2k+3}{2k+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+3}{2k+4}=\frac{2k+3}{2k+4}\quad o.k.$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

א. (1) נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - \frac{a^3}{2x}$ **,** $a > 0$

$\lim_{x\to\infty} 2x^2 - \frac{a^3}{2x} = \infty + 0 = \infty$ **, לכן אין אסימפטוטה אופקית**

$\lim_{x\to 0^+} 2x^2 - \frac{a^3}{2x} = 0 - \lim_{x\to 0^+} \frac{a^3}{0^+} = -\infty \quad \leftarrow a > 0$

$\lim_{x\to 0^-} 2x^2 - \frac{a^3}{2x} = 0 - \lim_{x\to 0^-} \frac{a^3}{0^-} = +\infty \quad \leftarrow a > 0$

, לכן $x = 0$ **אסימפטוטה אנכית**

(2) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x

$$\boxed{y = 2x^2 - \frac{a^3}{2x}}$$

$$0 = 2x^2 - \frac{a^3}{2x} \quad / \cdot 2x > 0$$

$$0 = 4x^3 - a^3$$

$$a^3 = 4x^3$$

$$x^3 = \frac{a^3}{4}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} \quad \boxed{a > 0 \quad \to \frac{a}{\sqrt[3]{4}} > 0}$$

$$\boxed{(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}, 0)}$$

תשובה: $(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}, 0)$

(3) נמצא את נקודות הקיצון

$$\boxed{y = 2x^2 - \frac{a^3}{2x}}$$

$$\boxed{y' = 4x + \frac{a^3}{2x^2}}$$

$$0 = 4x + \frac{a^3}{2x^2} \quad / \cdot 2x^2$$

$$0 = +8x^3 + a^3$$

$$x^3 = -\frac{a^3}{8} \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$x = -0.5a$$

$$y = 2(-0.5a)^2 - \frac{a^3}{2(-0.5a)} = 0.5a^2 + a^2 = 1.5a^2$$

$$\boxed{(-0.5a, 1.5a^2)}$$

זיהוי סוג הקיצון נמצא סימן הנגזרת השנייה (נדרש גם לסעיפים הבאים)

$$y'' = 4 - \frac{a^3 \cdot 2x}{2x^4}$$

$$\boxed{y'' = 4 - \frac{a^3}{x^3}}$$

$$y''(-0.5a) = 4 - \frac{a^3}{(-0.5a)^3} = 4 - \frac{1}{-0.5^3} = 12 > 0$$

קבלנו ש: $x = -0.5a$ **בתחום של קעירות כלפי מעלה ולכן מינימום (ללא קשר לסימן של** a **!!!)**

תשובה: $(-0.5a, 1.5a^2)$ **מינימום**

(4) בנקודת הפיתול הנגזרת השנייה מתאפסת,

כאשר אנו עוברים מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה, או להפך

$$0 = 4 - \frac{a^3}{x^3} \quad / : x^3$$

$$0 = 4x^3 - a^3$$

$$a^3 = 4x^3$$

$$x^3 = \frac{a^3}{4}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} \qquad \boxed{a > 0 \quad \rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{4}} > 0}$$

$$\boxed{(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}, 0)}$$

נבנה טבלה לתחומי קמירות וקעירות, שתאפשר לאשר את נקודת הפיתול

$$y''(-0.5a) = 12 > 0$$

$$y''(0.5a) = 4 - \frac{a^3}{(0.5a)^3} = -4 < 0$$

$$y''(a) = 4 - \frac{a^3}{a^3} = 3 > 0$$

x		$x = 0.63a$		$x = 0$	
y''	+	0	-		+
מסקנה	$\cup$	פיתול	$\cap$		$\cup$

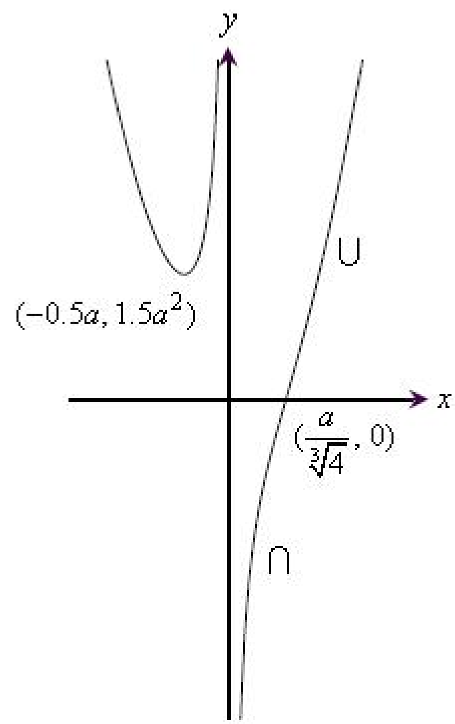
הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ כאשר $0 < x < \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ כאשר $x > \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$ או $x < 0$

ב. סקיצה עבור $a>0$

נשים לב: נקודת המינימום משמאל לציר ה- y **, ונקודת הפיתול מימין לציר ה-** y

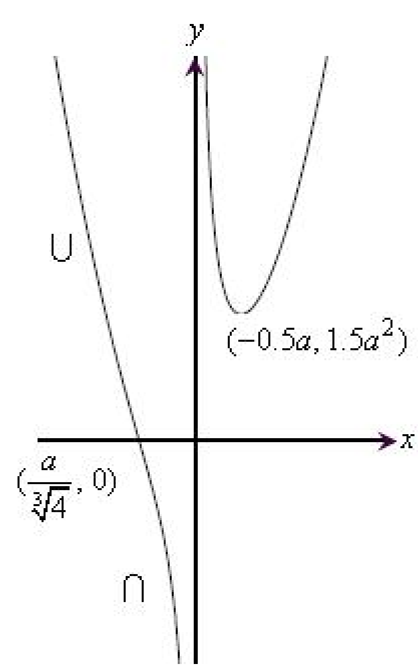
כאשר עבור $x>0$ **, וגם** $a>0$ **נקבל** $y'=4x+\frac{a^3}{2x^2}>0$ **והפונקציה עולה עבור** $x>0$



ג. סקיצה עבור $a<0$

נשים לב: נקודת המינימום מימין לציר ה- y **, ונקודת הפיתול משמאל לציר ה-** y

כאשר עבור $x<0$ **, וגם** $a<0$ **נקבל** $y'=4x+\frac{a^3}{2x^2}<0$ **והפונקציה יורדת עבור** $x<0$



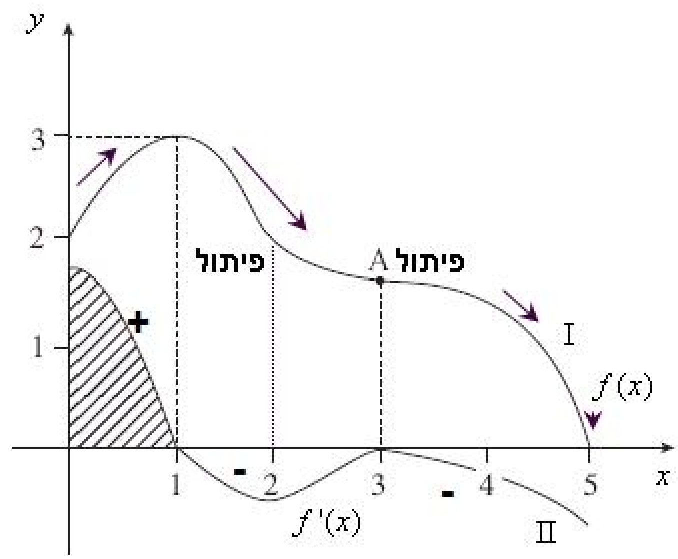
א. עבור $0<x<1$ **גרף** II **חיובי וגרף** I **עולה, ועבור** $1<x<5,\ x\neq 3$ **גרף** II **שלילי וגרף** I **יורד.**

בהתאם גרף I **הוא של הפונקציה** $f(x)$ **וגרף** II **של פונקצית הנגזרת** $f'(x)$ **,**

כאשר עבור $x=1$ **יש ל-** $f(x)$ **נקודת מקסימום, כמתואר בציור,**

ועבור $x=3$ **יש ל-** $f(x)$ **נקודת פיתול, כאשר המשיק בנקודה זו מקביל לציר ה-** x **.**

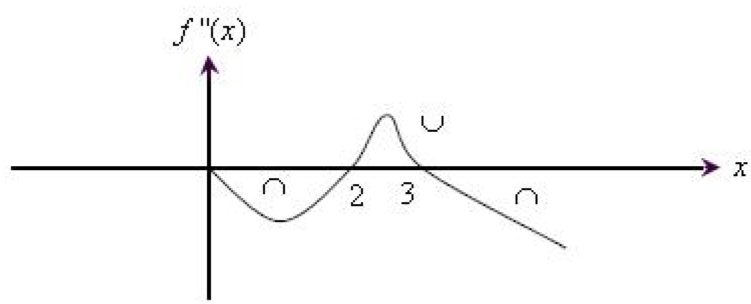
תשובה: גרף I **-** $f(x)$ **, גרף** II **-** $f'(x)$ **.**



ב. שיפוע המשיק בנקודה A **שווה לערך הנגזרת בנקודה ולכן השיפוע הוא** 0**. (כלומר המשיק מקביל לציר ה-** x **.)**

תשובה: 0

ג.(1) נשרטט את הגרף של $f''(x)$ **ונסביר בהמשך, גם עבור תת סעיף (2):**



על פי הנתון $f''(0)=0$ **. הסימונים של קעירות המופיעים בציור מתאימים ל-** $f(x)$

עבור $f'(x)$ $x=2$ **עוברת מירידה לעלייה, לכן הנגזרת שלה** $f''(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות**

בהתאם , עבור $x=2$ **יש ל-** $f(x)$ **נקודת פיתול.**

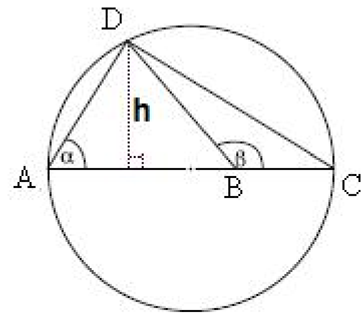
עבור $x=3$ $f'(x)$ **עוברת מעלייה לירידה, לכן הנגזרת שלה** $f''(x)$ **עוברת מחיוביות לשליליות**

בהתאם , עבור $x=3$ **יש ל-** $f(x)$ **נקודת פיתול (בה המשיק מקביל לציר ה-** x **.**

(2) $x=3$ **,** $x=2$

ד. על פי הגרף הנתון $f(1)=3$ $f(0)=2,$ $\leftarrow$ $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\Big]_0^1 = f(1)-f(0)=3-2=1$

תשובה: 1 **יחידות שטח.**



<u>**ניתוח נתונים וחישובי זוויות**</u>

למשולש ADB **ול-** ADC **יש גובה משותף לצלעות** AB **ו-** AC **בהתאמה (ראה ציור).**

לכן יחס השטחים הוא כיחס בין צלעות אלו.

AC **קוטר ולכן** $\angle ADC = 90°$ **(זווית היקפית הנשענת על קוטר)**

$\angle ADB = \quad -\sim$ **(זווית חיצונית למשולש** ADB **שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות הצמודות לה)**

<u>ΔADC</u>

$$\cos\sim = \frac{AD}{AC}$$

$$\boxed{AD = 2R\cos\sim}$$

<u>ΔABD</u>

$$\frac{AD}{\sin(180° - \ )} = \frac{AB}{\sin(\quad -\sim)}$$

$$\frac{2R\cos\sim}{\sin} = \frac{AB}{\sin(\quad -\sim)}$$

$$\boxed{AB = \frac{2R\cos\sim\sin(\quad -\sim)}{\sin}}$$

$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{2R\cos\sim\ \sin(\quad -\sim)}{\sin}}{2R} = \frac{\cos\sim\ \sin(\quad -\sim)}{\sin}$$

תשובה: $\frac{\cos\sim\ \sin(\quad -\sim)}{\sin}$

ב. $S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}S_{\Delta ADC}$ **ובהתאם שטחי שני המשולשים הקטנים שווים ולכן** DB **תיכון,**

כלומר , הנקודה B **מתלכדת עם מרכז המעגל ומשולש** ADB **הוא שווה שוקיים.**

כיוון שנתון גם כי $\sim = 60°$ **, אז המשולש** ADB **הוא שווה צלעות ובהתאם** $= 120°$ **(זווית חיצונית).**

תשובה: $= 120°$