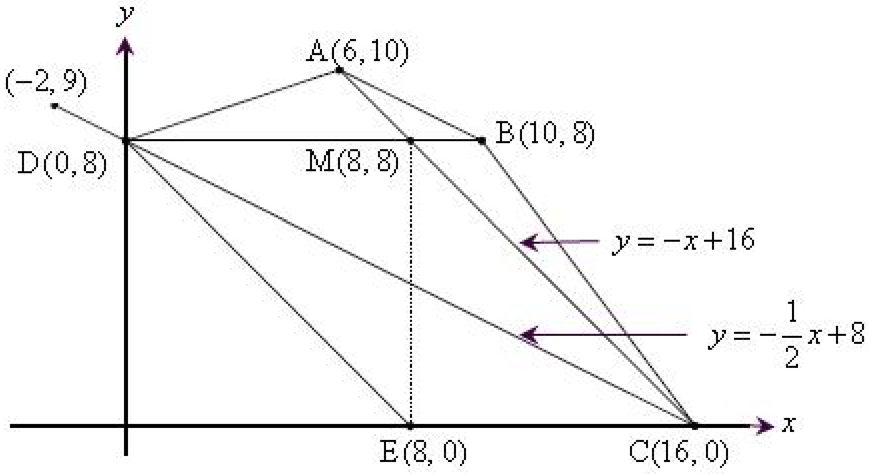
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נמצא את שיפועי הבסיסים, המקבילים זה לזה, $m_{\text{AB}}=\frac{10-8}{6-10}=-\frac{1}{2}$ **.**

נמצא את משוואת הבסיס CD **, שמונח על הישר העובר דרך הנקודה** $(-2,9)$ **:**

$$\text{CD}\equiv y-9=-\frac{1}{2}(x+2)$$

$$\boxed{\text{CD}\equiv y=-\frac{1}{2}x+8}$$

M **מחלקת את האלכסונים כך ש:** $\text{MB}:\text{MD}=1:4$ **, וגם** $x_{\text{M}}=8$

$$8=\frac{10\cdot 4+x_{\text{D}}\cdot 1}{4+1}\quad\to x_{\text{D}}=0\quad\to\quad y_{\text{D}}=-\frac{1}{2}\cdot 0+8=8$$

ובהתאם $\boxed{\text{D}(0,8)}$

כיוון ששיעורי ה- y **של הנקודות על האלכסון** BD **שווים, הרי שהוא מקביל לציר ה-** x **.**

לכן הזווית בין האלכסונים מתקבלת ישירות משיפוע האלכסון AC **.**

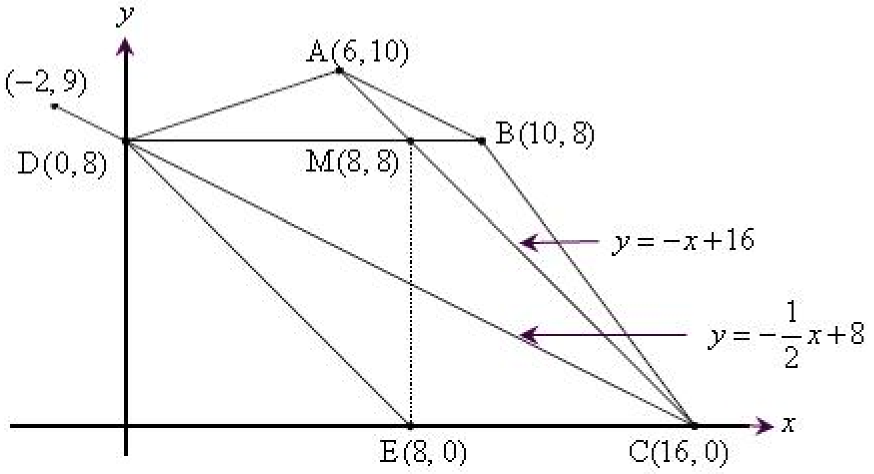
$$m_{\text{AC}}=m_{\text{AM}}=\frac{10-8}{6-8}=-1$$

הזווית המתאימה היא כידוע $135°$**, וכיוון שנדרשת זווית חדה הרי שהיא** $45°$ **.**

תשובה: הזווית בין אלכסוני הטרפז היא בת $45°$ **.**

ב. נמצא את שטח המחומש DABCE **, באמצעות חיבור שטח הטרפז** DBCE **והמשולש** DAB

כיוון שבסיסי הטרפז, הצלע במשולש והגבהים המתאימים מקבילים לצירים:



נמצא את שיעורי הקדקוד C **, באמצעות משוואות האלכסון** AC **ובסיס הטרפז** CD

$$\mathrm{AC}\equiv y-8=-1(x-8)$$

$$\boxed{\mathrm{AC}\equiv y=-x+16}$$

$$\begin{cases} y=-x+16 \\ y=-\frac{1}{2}x+8 \end{cases}$$

$$-x+16=-\frac{1}{2}x+8$$

$$-\frac{1}{2}x=-8$$

$$x=16 \quad \rightarrow y=-16+16=0$$

ובהתאם $\boxed{\mathrm{C}(16,0)}$

BD **מקביל לציר ה-** x **ובהתאם גם** CE **מקביל לציר ה-** x **.**

$$\mathrm{BD}=10-0=8$$

ולכן $8=x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{E}} \quad \rightarrow 8=16-x_{\mathrm{E}} \quad \rightarrow x_{\mathrm{E}}=8 \quad \rightarrow \mathrm{E}(8,0)$

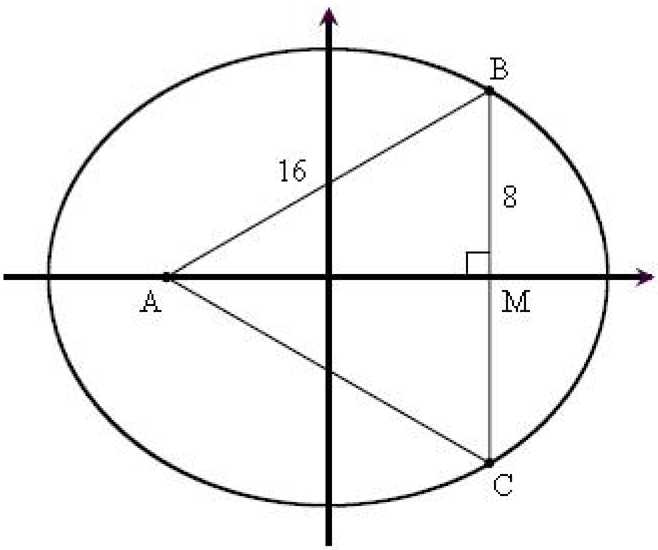
$$\mathrm{S}_{\mathrm{DBCE}}=\frac{(\mathrm{DB}+\mathrm{CE})\mathrm{h}_{\mathrm{DBCE}}}{2}=\frac{(10+8)\cdot 8}{2}=72$$

$$\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{DBA}}=\frac{\mathrm{DB}\cdot\mathrm{h}_{\mathrm{DB}}}{2}=\frac{10\cdot 2}{2}=10$$

$$\boxed{\mathrm{S}_{\mathrm{DBCE}}=82}$$

תשובה: שטח המחומש הוא 82 **יחידות שטח.**

א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



כיוון שקיים גובה המחבר את מוקדי האליפסה, הנמצאים על ציר ה- x ,
הרי שהצלע המתאימה מאונכת לציר ה- x .

הגובה במשולש שווה צלעות הוא גם תיכון ולכן $\text{BM} = \frac{16}{2} = 8$

המרחק בין מוקדי האליפסה הוא $2c$

נעזר במשפט פיתגורס במשולש ABO :

$$(2c)^2 = 16^2 - 8^2$$

$$4c^2 = 192$$

$$\boxed{c^2 = 48}$$

סכום המרחקים של כל נקודה על האליפסה ממוקדיה הוא $2a$

בהתאם, $2a = 16 + 8 = 24 \quad \to \boxed{a = 12}$

באליפסה מתקיים הקשר $a^2 - b^2 = c^2$

ובהתאם, $b^2 = 12^2 - 48 \quad \to \boxed{b^2 = 96}$

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{96} = 1$.

ב. אורך הצלע של המשולש, המחברת את מוקדי האליפסה, היא: $2c = 2\sqrt{48}$

הגובה המקסימלי לצלע זו מתקבל כאשר הקדקוד השלישי מונח על ציר ה- y ואורכו: $\sqrt{b} = \sqrt{96}$

לכן שטח המשולש המקסימלי הוא: $\frac{2\sqrt{48}\sqrt{96}}{2} = 67.88$.

תשובה: לא קיים משולש, כמתואר בסעיף, ששטחו 70 .

א. נתון ריבוע ABCD **,** $\mathrm{A}(13, 2, -2)$ **, והצלע** BC **מונחת על הישר** $\underline{x} = (25, 5, -5) + t(8, -4, 1)$

נקודה טיפוסית על BC **:** $(25+8t, 5-4t, -5+t)$

נמצא וקטור של הצלע AB

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underline{\mathrm{B}} - \underline{\mathrm{A}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underline{x} = \underline{(25+8t, 5-4t, -5+t)} - \underline{(13, 2, -2)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underline{x} = (12+8t\ , 3-4t\ , -3+t)$$

צלעות הריבוע מאונכות זה לזה, לכן המכפלה הסקלרית היא אפס:

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$
$$\underline{(12+8t, 3-4t, -3+t)}\underline{(8, -4, 1)} = 0$$
$$96 + 64t - 12 + 16t - 3 + t = 0$$
$$81t + 81 = 0$$
$$\boxed{t = -1}$$

בהתאם וקטור של הצלע AB **הוא** $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underline{x} = (4\ , 7\ , -4)$

צלעות הריבוע שוות זו לזו

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-4)^2} = 9 \text{ , ולכן גם } \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = 9$$

$$\sqrt{(25+8t)^2 + (5-4t)^2 + (-5+t)^2} = 9$$
$$162t + 81t^2 = 0$$
$$t = 0, \quad t = -2$$

ובהתאם שיעורי הקדקוד C **האפשריים** $\mathrm{C}(9, 13, -7), \quad \mathrm{C}(25, 5, -5)$

תשובה: $\mathrm{C}(9, 13, -7), \quad \mathrm{C}(25, 5, -5)$.

ב. נתון כי $\mathrm{OE} = \mathrm{OF}$ **, ובהתאם נסמן:** $\mathrm{F}(0, q, 0), \quad \mathrm{E}(q, 0, 0)$ **, כאשר** $q > 0$ **על פי הנתון.**

נמצא הצגה פרמטרית של הישר EF

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \underline{\mathrm{F}} - \underline{\mathrm{E}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \underline{x} = \underline{(0, q, 0)} - \underline{(q, 0, 0)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \underline{x} = (-q\ , q\ , 0) = q(1, -1, 0)$$

קל לראות שווקטור זה אינו כפולה של הווקטור BC **:** $\underline{x} = (25, 5, -5) + t(8, -4, 1)$

בהתאם הצגה פרמטרית של המישור ® היא $® = \underline{x} = (25, 5, -5) + t(8, -4, 1) + q(1, -1, 0)$

תשובה: $\underline{x} = (25, 5, -5) + t(8, -4, 1) + q(1, -1, 0)$

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $y=\frac{x^2+x+k}{2x-1}$

ועל ידי הישרים $x=1$ **ו-** $x=2$, **שווה ל-** 1.5, **כאשר עבור** $1\le x\le 2$ **הפונקציה חיובית.**

<u>נניח</u> כי השטח מוגבל גם על ידי ציר ה- x **כי אחרת השטח אינסופי.**

חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה,

לכן ניתן לחלק את הפולינומים לפני ביצוע פעולת האינטגרל

$$\begin{array}{l} \underline{0.5x+0.75} \\ x^2+x+k \,\big|\, 2x-1 \\ \underline{x^2-0.5x} \\ =\ 1.5x+k \\ \quad \underline{1.5x-0.75} \\ \quad =\ \ k+0.75 \end{array}$$

בהתאם: $y=\frac{x^2+x+k}{2x-1}=0.5x+0.75+\frac{k+0.75}{2x-1}$

$$S=\int_1^2 (y=\frac{x^2+x+k}{2x-1}-0)\,)dx$$

$$S=\int_1^2 (0.5x+0.75+\frac{k+0.75}{2x-1}))dx$$

$$S=(\frac{x^2}{4}+0.75x+(k+0.75)\frac{\ell n|2x-1|}{2})]_1^2$$

$$S=(\frac{2^2}{4}+0.75\cdot 2+(k+0.75)\frac{\ell n|2\cdot 2-1|}{2})-(\frac{1^2}{4}+0.75\cdot 1+(k+0.75)\frac{\ell n|2\cdot 1-1|}{2})$$

$$S=(2.5+\frac{(k+0.75)}{2}\ell n3)-(1+\frac{(k+0.75)}{2}\ell n1)$$

$$S=\boxed{1.5+\frac{(k+0.75)}{2}\ell n3}$$

משווה את השטח ל- 1.5

$$1.5=1.5+\frac{(k+0.75)}{2}\ell n3$$

$$0=\frac{(k+0.75)}{2}\ell n3$$

$$\boxed{k=-0.75}$$

תשובה: $k=-0.75$ **.**

המספר המרוכב: $z=1+i$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה $z^4=a+bi$.

נחשב את z^4 בעזרת הפתרון הנתון: $z=1+i$

$$z^4=(1+i)^4=(2i)^2=-4$$

$$\boxed{z^4=-4}$$

נמצא את ארבעת השורשים של: $z^4=-4=4\,cis180^\circ$

$$z^4=-4=4\,cis180^\circ$$

$$z_k=\sqrt[4]{4}\,cis(\frac{180^\circ}{4}+\frac{360^\circ k}{4})$$

$$z_k=\sqrt{2}\,cis(45^\circ+90^\circ k)$$

$$z_0=\sqrt{2}\,cis45^\circ=1+i$$

$$z_1=\sqrt{2}\,cis135^\circ=\boxed{-1+i}$$

$$z_2=\sqrt{2}\,cis225^\circ=\boxed{-1-i}$$

$$z_2=\sqrt{2}\,cis315^\circ=\boxed{1-i}$$

תשובה: $-1+i$, $-1-i$, $1-i$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2a^x-\frac{1}{6}a^{2x}$, a **הוא פרמטר גדול מ-** 1

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *שיפוע המשיק*, כלומר את *נגזרת הפונקציה*.

$$\boxed{f(x)=2a^x-\frac{1}{6}a^{2x}}$$

$$f'(x)=2a^x\ell n\,a-\frac{1}{3}a^{2x}\ell n\,a \quad \to \boxed{f'(x)=\ell n\,a\,(2a^x-\frac{1}{3}a^{2x})}$$

$$f''(x)=\ell n\,a\,(2a^x\ell n\,a-\frac{2}{3}a^{2x}\ell n\,a) \quad \to \boxed{f''(x)=2a^x\ell n^2 a\,(1-\frac{1}{3}a^x)}$$

$$0=2a^x\ell n^2 a\,(1-\frac{1}{3}a^x) \quad /:a^x\neq 0$$

$$1-\frac{1}{3}a^x=0 \quad /:a^x\neq 0$$

$$\boxed{a^x=3} \quad \to x=\frac{\ell n 3}{\ell n\,a}$$

נוכיח קיצון של פונקצית המשיק (הנגזרת), ובו-זמנית תחומי קעירות של $f(x)=2a^x-\frac{1}{6}a^{2x}$

נמצא את תחומי קמירות/ קעירות בעזרת טבלה, $2a^x\ell n^2 a>0$

$$a>1 \quad \to \ell n\,a>0 \ \text{,} \quad f''(\frac{\ell n 2}{\ell n\,a})=1-\frac{1}{3}\cdot 2>0, \quad f''(\frac{\ell n 4}{\ell n\,a})=1-\frac{1}{3}\cdot 4<0$$

x	$x=\frac{\ell n 4}{\ell n\,a}$	$x=\frac{\ell n 3}{\ell n\,a}$	$x=\frac{\ell n 2}{\ell n\,a}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
מסקנה	$\cup$	**פיתול**	$\cap$

פונקצית הנגזרת עוברת מעלייה לירידה ולכן עבור $a^x=3$ **מתקבל מקסימום**

תשובה: $a^x=3$

ב. השיפוע המקסימלי של גרף הפונקציה הוא $a\ell n\,a$ **, לכן**

$$m(x=\frac{\ell n 3}{\ell n\,a},a^x=3)=\ell n\,a\,(2\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 3^2) \quad \to a\ell n\,a=\ell n\,a\,(2a^x-\frac{1}{3}a^{2x})$$

$$a=6-3$$

$$\boxed{a=3}$$

תשובה: $a=3$

ג. בהתאם להסבר שניתן בסעיף א, כאשר $x=\frac{\ell n 3}{\ell n\,a}=\frac{\ell n 3}{\ell n 3}=1$

תשובה: קעורה כלפי מעלה $\cup$ **:** $x<1$

קעורה כלפי מטה $\cap$**:** $x>1$