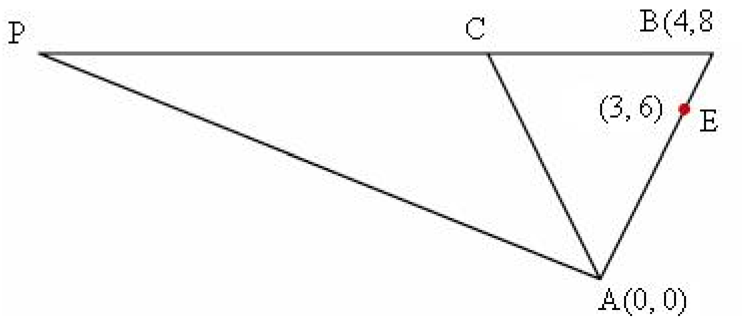


א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:

שטח המשולש CAE **גדול פי** 3 **משטח המשולש** CEB**, כאשר לשני המשולשים גובה משותף, לצלעות** AE **ו-** BE **בהתאמה. לכן, הנקודה** E **מחלקת את** AB **ביחס של** 3:1**.**

ע"פ נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון

$$\left.\begin{array}{l} 3=\dfrac{1\cdot 0+3\cdot x_B}{4} \quad \rightarrow x_B=4 \\ 6=\dfrac{1\cdot 0+3\cdot y_B}{4} \quad \rightarrow y_B=8 \end{array}\right\} \boxed{B(4,8)}$$

ב. נקודה P **נמצאת על המשך** BC **כך ש-** PC = 2BC**.**

נסמן $P(s,t)$ **- נקודה על המקום הגיאומטרי.**

ע"פ נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון

$$\left.\begin{array}{l} x_C=\dfrac{2\cdot 4+1\cdot s}{3}=\dfrac{8+s}{3} \\ y_C=\dfrac{2\cdot 8+1\cdot t}{3}=\dfrac{16+t}{3} \end{array}\right\} \boxed{C\left(\dfrac{8+s}{3},\dfrac{16+t}{3}\right)}$$

AB = AC **ועל פי נוסחת מרחק בין שתי נקודות**

$$\sqrt{\left(\frac{8+s}{3}-0\right)^2+\left(\frac{16+t}{3}\right)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(8-0)^2}$$

$$\frac{(8+s)^2}{9}+\frac{(16+t)^2}{9}=80$$

וזה המעגל $(x+8)^2+(y+16)^2=720$

כלומר מרכז המעגל $M(-8,-16)$ **ורדיוסו** $\sqrt{720}$

תשובה: $(x+8)^2+(y+16)^2=720$

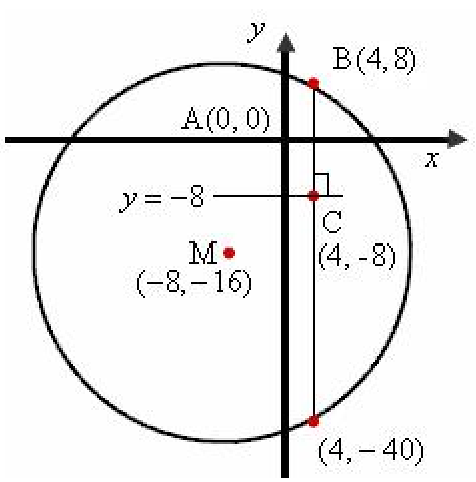
ג. שיעורי הנקודה $C\left(\frac{8+4}{3},\frac{16+(-40)}{3}\right) \rightarrow C(4,-8)$

כיוון ש- BC **מקביל לציר ה-** y **(שיעורי** x **שווים)**

הרי שהאנך ל- BC **מקביל לציר ה-** x**,**

ומשוואתו תהייה $y=-8$

תשובה: $y=-8$



א. נתון מישור ® שמשוואתו $2x+y-z+3=0$ **.**

נציב את שיעורי $B(1,-2,m)$ **במשוואת המישור**

$$2\cdot 1+(-2)-m+3=0 \quad \to m=3 \quad \to B(1,-2,3)$$

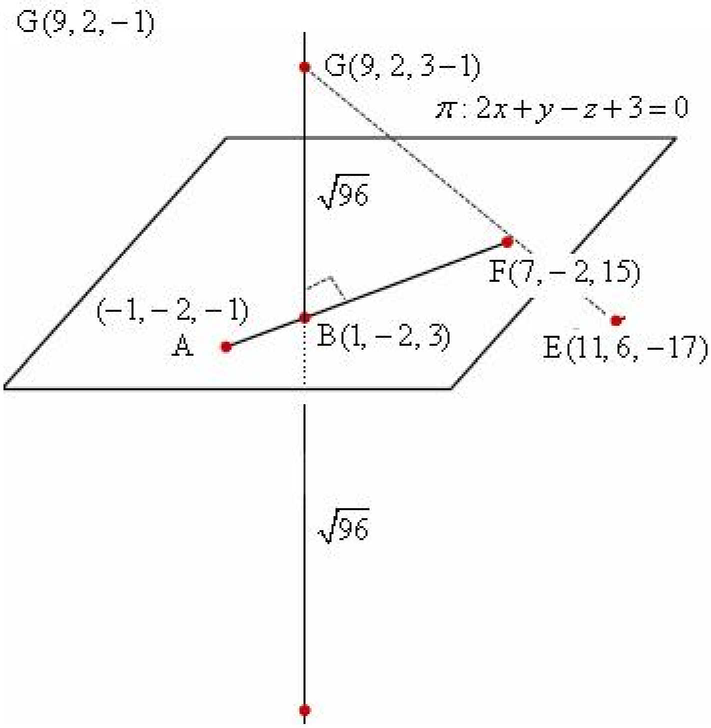
נציב את שיעורי $A(-1,-2,k)$ **במשוואת המישור**

$$2\cdot(-1)+(-2)-k+3=0 \quad \to k=-1 \quad \to A(-1,-2,-1)$$

הישר BG **מאונך למישור ®, לכן ההצגה הפרמטרית**

של הישר היא $\overline{BG}=\underline{x}=(1,-2,3)+t(2,1,-1)$

ונקודה טיפוסית על הישר $(1+2t,-2+t,3-t)$



$$\sqrt{96}=(\sqrt{\underline{G}-\underline{B}})^2=\sqrt{(2t)^2+t^2+t^2}$$
$$96=6t^2$$
$$t=\pm 4$$

$$G(1+2\cdot 4,-2+4,3-4)=G(9,2,3-1)\leftarrow x_G>0$$

תשובה: $G(9,2,-1)$

ב. $\overrightarrow{GE}=\underline{E}-\underline{G}=\underline{x}=(2,4,-16)$

לכן: $\ell=\underline{x}=(9,2,-1)+r(1,2,-8)$

ונקודה טיפוסית על הישר $(9+r,2+2r,-1-8r)$

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת המישור

$$2\cdot(9+r)+2+2r-(-1-8r)+3=0$$
$$18+2r+1+2r+1+8r+3=0 \quad \to$$
$$12r=-24 \quad \to r=-2 \quad \to F(7,-2,15)$$

$$\overrightarrow{AB}=\underline{B}-\underline{A}=\underline{x}=(2,0,4)$$
$$\overrightarrow{AF}=\underline{F}-\underline{A}=\underline{x}=(8,0,16)$$

ניתן לראות כי $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AB}$ **כאשר** A **נקודה משותפת,**

ולכן שלוש הנקודות על ישר אחד.

ג. הווקטור $\overrightarrow{AF}=\underline{x}=(8,0,16)$ **אינו כפולה של וקטור**

היחידה $\underline{x}=(1,0,0)$ **ולכן אינו מקביל/ מתלכד לציר ה-**

x **.**

שיעורי ה- y **הישר שעליו** A **,** B **ו-** F **שווים ל-** -2**,**

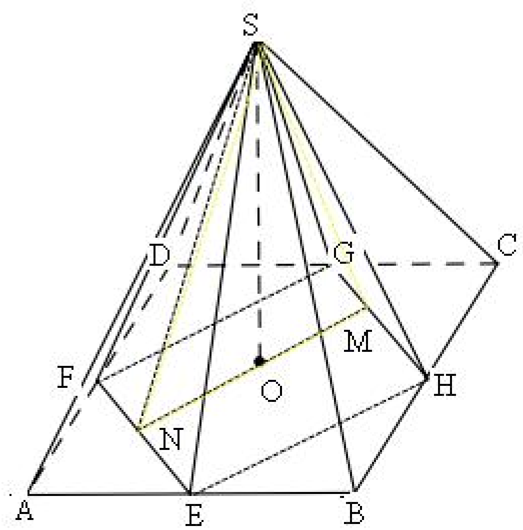
ולכן ישר זה אינו חותך את ציר ה- x **, שעליו** $y=0$ **.**

תשובה: AF **מצטלב עם ציר ה-** x **.**

ישר החיתוך של שני מישורי המשולשים SHG **ו-** SFE **, מקביל לאלכסון הפירמידה** BD **.**
הישרים המאונכים לישר זה הם הגבהים SM **ו-** SN **היוצאים מקדקוד הפירמידה, לקטעים** GH **ו-** FE **.**
הזווית בין שני האנכים, היא זווית הראש של המשולש שווה השוקיים MSN **,**
כמו זווית בין שתי פאות נגדיות של הפירמידה הריבועית GHEFS **.**
נתון כי גובה הפירמידה שווה לצלע הבסיס ABCD **, ונסמן את שניהם ב-** x **.**

אורך אלכסון הריבוע AC **הוא** $x\sqrt{2}$ **(משפט פיתגורס** ΔABC**), מחציתו** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(אלכסונים חוצים ונחצים),**

כאשר אורכי הקטעים MO **ו-** NO **שווים** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(** GH **ו-** FE **קטעי אמצעים, ולכן** $CM = MO = AN = NO = \frac{CO}{2}$**).**



$\underline{\Delta SMO}$

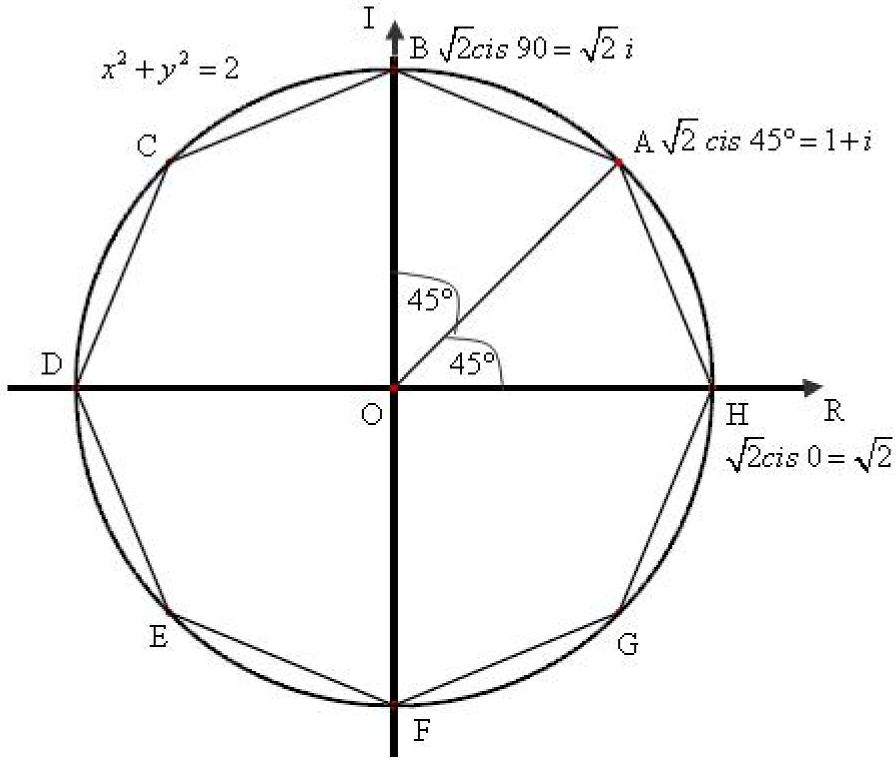
$$\tan \sphericalangle SMO = \frac{MO}{SO}$$

$$\tan \sphericalangle SMO = \frac{x}{x\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\sphericalangle SMO = 70.53^\circ$$

$$\sphericalangle MSN = 180^\circ - 2 \cdot 70.53^\circ = 38.94^\circ$$

תשובה: הזווית בין המישורים היא בת 38.94°.



נתון כי קדקוד A **הוא** $z = 1+i$ **.**

מרכז מתומן משוכלל הוא גם מרכז של המעגל החוסם, כאשר $\angle AOH = \angle BOA = \frac{360°}{8} = 45°$

$$r_z = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan^{-} = \frac{1}{1} = 1 \quad \rightarrow {}^{-} = 45° \quad \leftarrow 0 < {}^{-} < 90°$$

ובהתאם משוואת המעגל החוסם היא $x^2 + y^2 = 2$ **, מעגל קנוני שרדיוסו** $\sqrt{2}$ **.**

$\angle AOB = 45° \quad \rightarrow \angle BOH = 90°$ **ובהתאם:** $z_B = \sqrt{2}\,cis 90° = \sqrt{2}\,i$

H **על הציר הממשי ובהתאם:** $z_H = \sqrt{2}\,cis\;0° = \sqrt{2}$

תשובה: $H = \sqrt{2}\;,\; B = \sqrt{2}\,i$

א. נוסחת הגידול והדעיכה היא $M_t = M_0 \cdot q^t$

שעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן הוא q**. פרק הזמן הוא** t.

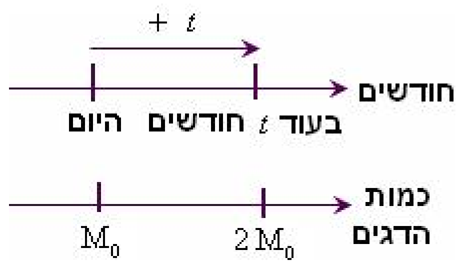
M_0 **- הכמות ראשונית ,** M_t **- כמות לאחר** t **תקופות.**

q_2 **גדול ב-** 8.7% **מ-** q_1**, ובהתאם** $q_2 = \frac{100+8.7}{100} q_1 = 1.087 q_1$

כעבור מספר חודשים כמות הדגים מסוג א' גְּדֵלָה פי 2 **.**

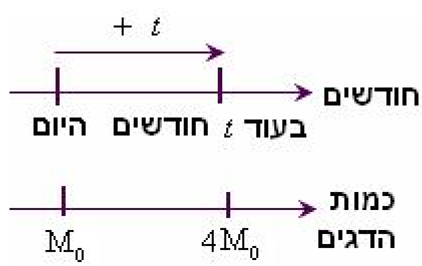
נציין כי כמויות הדגים שונות בשני המקרים, אך נסמן M_0 **בכל מקרה**

$$2M_0 = M_0 \cdot q_1^t \quad / : M_0$$
$$\Leftrightarrow 2 = q_1^t$$



כעבור מספר חודשים כמות הדגים מסוג ב' גְּדֵלָה פי 4 **.**

$$4M_0 = M_0 \cdot 1.087 q_1^t \quad / : M_0$$
$$\Leftrightarrow 4 = (1.087 q_1)^t$$
$$\Leftrightarrow 4 = 1.087^t \cdot q_1^t$$



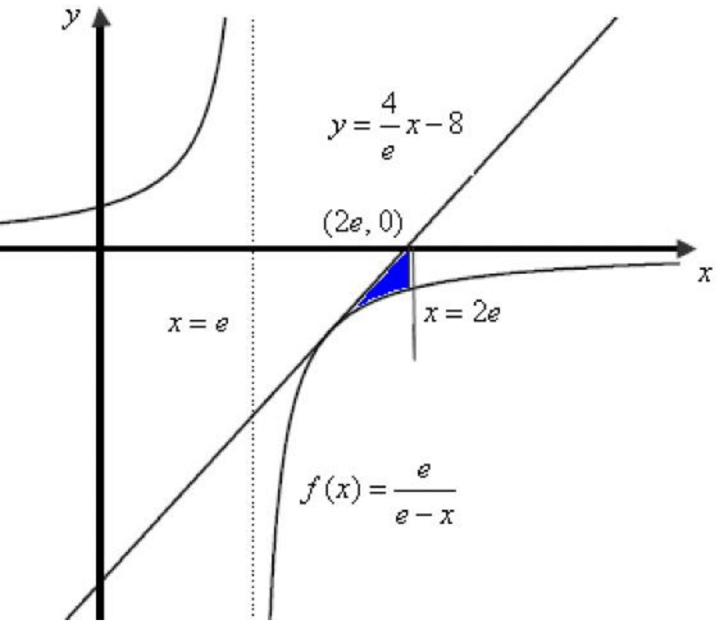
נפתור מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{cases} (1) \quad 2 = q_1^t \\ (2) \quad 4 = 1.087^t \cdot q_1^t \end{cases}$$
$$(2):(1) \quad 2 = 1.087^t$$
$$\ell n 2 = \ell n 1.087^t$$
$$\Leftrightarrow \ell n 2 = t \ell n 1.087$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ell n 2}{\ell n 1.087}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{t \approx 8.31}$$

תשובה: כעבור 8.31 **חודשים כמות הדגים מסוג א' גְּדֵלָה פי** 2 **, וכמות הדגים מסוג ב' גְּדֵלָה פי** 4 **.**

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e}{e-x}$ **והמשיק** $y=\frac{4}{e}x-8$ **.**

נמצא את שיעורי נקודת ההשקה:



$$f'(x)=\frac{e}{(e-x)^2}$$

$$\frac{4}{e}=\frac{e}{(e-x)^2}$$

$$4(e-x)^2=e^2$$

$$(e-x)^2=0.25e^2$$

$$e-x=0.5e\rightarrow x=0.5e\rightarrow y=\frac{e}{e-0.5e}=2\rightarrow(0.5e,2)$$

$$e-x=-0.5e\rightarrow x=1.5e\rightarrow y=\frac{e}{e-1.5e}=-2\rightarrow(1.5e,-2)$$

ונקודת ההשקה, הנמצאת ברביע הרביעי, היא $(1.5e,-2e)$ **.**

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך המשיק עם ציר ה- x **:**

$$0=\frac{4}{e}x-8$$

$$-\frac{4}{e}x=-8$$

$$x=2e\quad\rightarrow(2e,0)$$

$$\int_{1.5e}^{2e}\left(\frac{4}{e}x-8-\frac{e}{e-x}\right)dx$$

$$\frac{2x^2}{e}-8x+e\ln|e-x|\Big]_{1.5e}^{2e}$$

$$\left(\frac{2\cdot(2e)^2}{e}-8\cdot 2e+e\ln|e-2e|\right)-\left(\frac{2\cdot(1.5e)^2}{e}-8\cdot1.5e+e\ln|e-1.5e|\right)$$

$$(8e-16e+e)-(4.5e-12e+e\ln 0.5e)$$

$$-7e-(-7.5e+(e\ln 0.5+e\ln e))$$

$$=-7e-(-7.5e+e\ln 0.5+e)$$

$$=-7e-(-6.5e+e\ln 0.5)$$

$$\boxed{-e\ln 0.5-0.5e=0.525}$$

תשובה: גודל השטח $-e\ln 0.5-0.5e=0.525$ **יח"ר**

א. נתונה הפונקציה $f'(x)=\frac{2\ell n\,x-1}{x}$ **(תחום ההגדרה** $x>0$**)**

לפונקציה $f(x)$ **נקודת פיתול בנקודה שבה** $f(x)=b$ **.**

$$f''(x)=\frac{2-(2\ell n\,x-1)}{x^2}=\frac{3-2\ell n\,x}{x^2}\quad\to 0=3-2\ell n\,x$$

$$\ell n\,x=1.5\quad\to x=e^{1.5}$$

כלומר שנקודת הפיתול (נתון שקיימת) היא $(e^{1.5},b)$

ניעזר באינטגרל על-ידי זיהוי הנגזרת של המונה, למציאת הפונקציה הקדומה:

$$f(x)=\int\frac{2\ell n\,x-1}{x}dx=\int\frac{1}{2}\cdot(2\ell n\,x-1)\cdot\frac{2}{x}dx=\frac{(2\ell n\,x-1)^2}{4}+c$$

או

$$f(x)=\int\frac{2\ell n\,x-1}{x}dx=\int\frac{2\ell n\,x}{x}-\frac{1}{x}dx=\int(2\ell n\,x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x})dx=\ell n^2x-\ell n\,x+c$$

$$b=\frac{(2\ell n\,e^{1.5}-1)^2}{4}+c$$
$$b=1+c$$
$$c=b-1$$

$$b=\ell n^2e^{1.5}-\ell n\,e^{1.5}+c$$
$$b=0.75+c$$
$$c=b-0.75$$

תשובה: $f(x)=\frac{(2\ell n\,x-1)^2}{4}+b-1$ **, או** $f(x)=\ell n^2x-\ell n\,x+b-0.75$

ב. (1) נמצא את נקודות הקיצון

$$\frac{2\ell n\,x-1}{x}=0$$
$$\ell n\,x=0.5$$
$$x=\sqrt{e}\quad\to f(\sqrt{e})=\ell n^2\sqrt{e}-\ell n\sqrt{e}+b-0.75=0.25-0.5+b-0.75=b-1$$

$$f''(\sqrt{e})=\frac{3-2\ell n\sqrt{e}}{+}=\frac{2}{+}>0$$

תשובה: $(\sqrt{e},b-1)$ **מינימום.**

(2) נמצא את תחומי קעירות כלפי מעלה/ מטה בעזרת טבלה, (מכנה הנגזרת השנייה חיובי)

$$f''(e^2)=3-2\ell n\,e^2=-1<0$$
$$f''(e)=3-2\ell n\,e=1>0$$

x	e^2	$e^{1.5}$	e	0
$f''(x)$	$-$	0	$+$	
מסקנה	$\cap$	**פיתול**	$\cup$	

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ **-** $0<x<e^{1.5}$ **, קעירות וכלפי מטה** $\cap$ **-** $x>e^{1.5}$

ג. (1) $(\sqrt{e}, b-1)$ **מינימום מוחלט של הפונקציה, שרציפה עבור** $x > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \ell n^2 x - \ell n\, x + b - 0.75 = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \ell n^2 x - \ell n\, x + b - 0.75 = +\infty$$

ובהתאם על-מנת שתהייה שתי נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x

נדרש: $b - 1 < 0 \quad \to b < 1$

תשובה: $b < 1$

(2) סקיצה של גרף הפונקציה ($b > 0$ **ולכן נקודת הפיתול ברביע הראשון)**

על פי סעיף ג (1) $0 < b < 1$