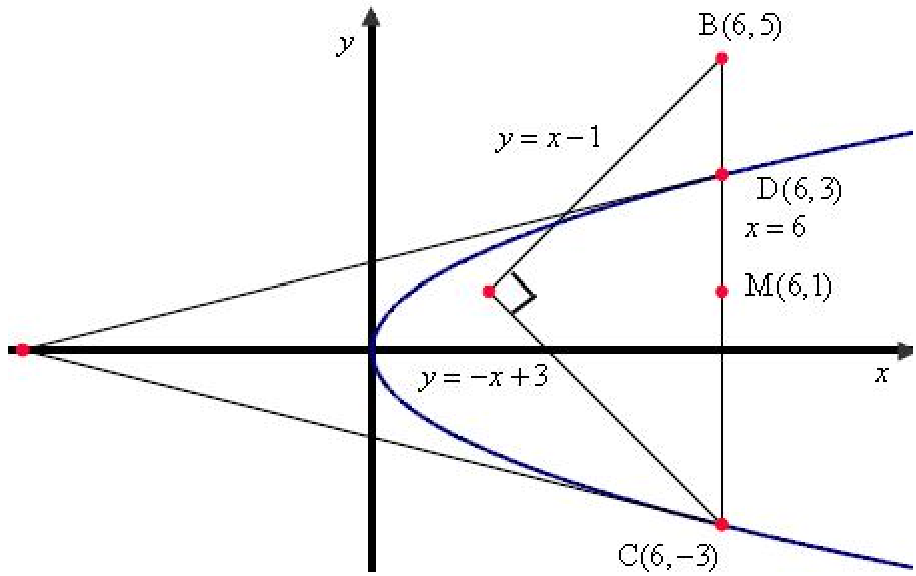
א. משוואת הצלע AB **היא** $y=x-1$ **ומשוואת הצלע** AC **היא** $y=-x+3$ **.**

מכפלת השיפועים היא -1 $m_{\mathrm{AB}}=1, m_{\mathrm{AC}}=-1$ **, ולכן המשולש הוא ישר זווית, כאשר** $\sphericalangle\mathrm{A}=90^\circ$ **.**

מרכז המעגל החוסם, הוא באמצע היתר: BC **, בהתאם למשפט: זווית היקפית ישרה במעגל נשענת על קוטר.**



נתון כי $\mathrm{D}(6,3)$ **נמצאת על הצלע** BC **כך ש:** $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{1}{3}$ **, ובהתאם נשתמש בנוסחה של חלוקת קטע ביחס נתון.**

נסמן את שיעורי הקדקוד $\mathrm{B}(x,x-1)$ **, בהתאם למשוואת הצלע** AB **,** $y=x-1$ **.**

$$\begin{cases} 6=\dfrac{3x+x_{\mathrm{C}}}{4}\rightarrow x_{\mathrm{C}}=24-3x \\ 3=\dfrac{3(x-1)+y_{\mathrm{C}}}{4}\rightarrow y_{\mathrm{C}}=15-3x \end{cases}$$

נציב את שיעורי הקדקוד $\mathrm{C}(24-3x,15-3x)$ **, במשוואת הצלע** AC **היא** $y=-x+3$ **.**

$$15-3x=-(24-3x)+3 \quad \rightarrow -6x=-36 \quad \rightarrow x=6$$

משוואת היתר היא $x=6$ **, כי** $x_{\mathrm{B}}=x_{\mathrm{D}}=6$ **.**

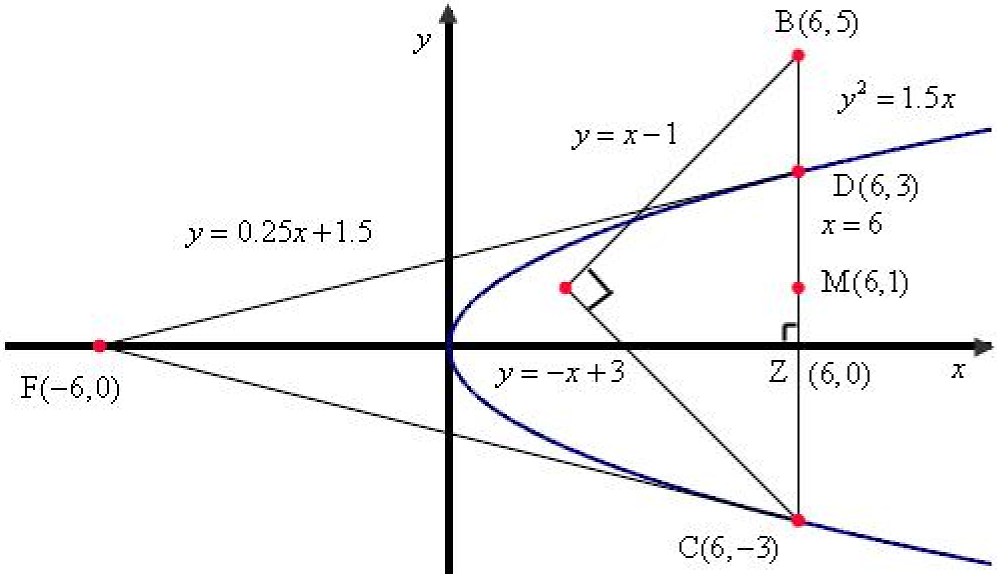
בהתאם נקבל $\mathrm{B}(6,5)$ **,** $\mathrm{C}(6,-3)$ **.**

ושיעורי נקודת אמצע היתר: $\mathrm{M}(6,1)\left\{\begin{array}{l} x_{\mathrm{M}}=6 \\ y_{\mathrm{M}}=\dfrac{5+(-3)}{2}=1 \end{array}\right.$ **, ומכאן שהרדיוס** $R=5-1=4$ **.**

תשובה: משוואת המעגל החוסם את $\Delta\mathrm{ABC}$ **היא** $(x-6)^2+(y-1)^2=16$

ב. הנקודה $D(6,3)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 2px$ **.**

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת הפרבולה: $3^2 = 2p \cdot 6 \rightarrow p = 0.75 \rightarrow y^2 = 1.5x$



נתון כי המשיק (DF) **לפרבולה בנקודה** $D(6,3)$**, נפגש עם ישר העובר ב-** $C(6,-3)$**, כך ש-** $FD = FC$ **.**

עקב הסימטריה של הפרבולה לציר ה- x**, והעובדה שהישר** $CD: x = 6$ **מאונך לציר ה-** x**,**

הרי שגם הישר FC **יהיה משיק לפרבולה ונקודת החיתוך תהייה על ציר ה-** x **.**

נוסחת משוואת משיק לפרבולה: $yy_0 = p(x + x_0)$ **.**

נציב $D(6,3)$ **,** $p = 0.75$ **ונקבל** $3y = 0.75(x+6) \rightarrow y = 0.25x + 1.5$ **.**

עבור $y = 0$ **נקבל** $F(-6,0)$**, שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-** x **.**

$$S_{\Delta FDC} = \frac{DC \cdot ZF}{2} = \frac{(3-(-3)) \cdot (6-(-6))}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$$

תשובה: שטח המשולש הוא 36 **יח"ר.**

שני המישורים מקבילים, כלומר וקטור המקדמים שלהם (הנורמל של המישורים, $\underline{n}:(a,b,c)$) שווה,

ובהתאם משוואותיהם: $®_1: ax+by+cz+d_1=0, \quad ®_2: ax+by+cz+d_2=0$

נציב את שיעורי הנקודות הנתונות במשוואות המישורים.

$$\text{A}(2, 0, 3) \quad ®_1: 2a+3c+d_1=0 \quad \to 2a+3c-6c=0 \quad \to a=1.5c$$
$$\text{B}(0, 0, 6) \quad ®_1: 6c+d_1=0 \quad \to d_1=-6c \uparrow$$
$$\text{C}(-2, 0, 2) \quad ®_2: -2a+2c+d_2=0 \quad \to -3c+2c+d_2=0 \quad \to d_2=c$$
$$®_1: 1.5cx+by+cz-6c=0$$
$$®_2: 1.5cx+by+cz+c=0$$

המרחק בין שני המישורים המקבילים הוא 2 , ובהתאם נשתמש בנוסחה למרחק בין מישורים מקבילים:

$$2=\frac{|-6c-c|}{\sqrt{(1.5c)^2+b^2+c^2}}$$
$$2=\frac{|-7c|}{\sqrt{3.25c^2+b^2}}$$
$$13c^2+4b^2=49c^2 \quad \to b=\pm 3c$$

לפני ההעלאה הריבוע, כל הביטויים חיוביים, ולכן אין צורך בבדיקה.

אפשרות ראשונה:

$$b=3c \quad \to c=2, \quad b=6, \quad a=3, \quad d_1=-12, \quad d_2=2$$
$$®_1=3x+6y+2z-12=0, \quad ®_2=3x+6y+2z+2=0$$

אפשרות שנייה:

$$b=-3c \quad \to c=2, \quad b=-6, \quad a=3, \quad d_1=-12, \quad d_2=2$$
$$®_1=3x-6y+2z-12=0, \quad ®_2=3x-6y+2z+2=0$$

תשובה: $®_1=3x+6y+2z-12=0, \quad ®_2=3x+6y+2z+2=0$

או: $®_1=3x-6y+2z-12=0, \quad ®_2=3x-6y+2z+2=0$

נתונה המשוואה $z^3 = w$, אשר אחד מפתרונותיה הוא $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

נעבור להצגה טריגונומטרית:

$$\tan^{-} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

$${}^{-} = -60° + 180°k$$

$${}^{-} = 120° \quad \leftarrow 2nd\ quadrant$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$z = cis\,120°$$

ובהתאם על פי משפט דה-מואבר $w = z^3 = 1^3 cis(120° \cdot 3) = cis\,360°$.

שלושת הפתרונות, על פי נוסחת השורשים של מספרים מרוכבים:

$$z_k = cis\left(\frac{360°}{3} + \frac{360°K}{3}\right)$$

$$k = 0: \quad z_0 = cis\,120°$$

$$k = 1: \quad z_1 = cis\,240°$$

$$k = 2: \quad z_2 = cis\,360°$$

וגם ניתן היה ישירות לקבל את הפתרונות, שבמקרה של $(cis^{-})^n = w$,

מהווים סדרה הנדסית שמנתה $\frac{360°k}{n}$ (במקרה הפרטי $120°k$).

נבדוק את הטענה המתבקשת:

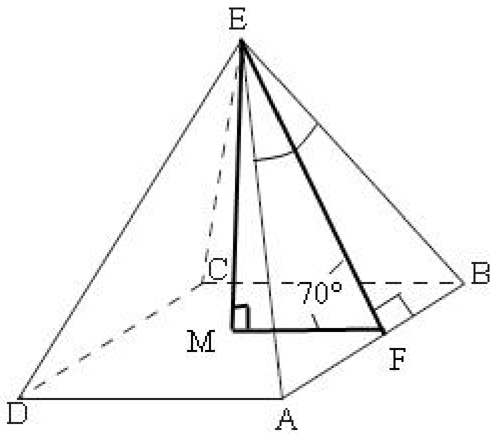
$$z_0 \cdot z_1 = cis\,120° \cdot cis\,240° = cis\,360° = z_2$$

$$z_0 \cdot z_2 = cis\,120° \cdot cis\,360° = cis\,480° = cis\,120° = z_0$$

$$z_1 \cdot z_2 = cis\,240° \cdot cis\,360° = cis\,600° = cis\,240° = z_1$$

תשובה: הוכַח.

(1) פאות הפירמידה הן משולשים שווי שוקיים חופפים, כי הבסיס הוא ריבוע,
והמקצועות הצדדיים שווים זה לזה בפירמידה ישרה.
הזווית שבין הפאה הצדדית (ΔSAB) לבסיס הפירמידה $ABCD$
היא הזווית בין שני האנכים (הגבהים) לישר החיתוך (מקצוע הבסיס AB) .
נוריד גובה EF מהפאה למקצוע הבסיס, ולכן הוא גם תיכון וחוצה זווית הראש.
MF הוא אנך מהבסיס, כי הוא קטע אמצעים ב- ΔDAB ,
ולכן גם מקביל לצלע AD ובהתאם מאונך ל- AB .
הזווית בין הפאה למישור הבסיס היא $\sphericalangle EFM = 70°$.
נסמן ב- x את מקצוע הבסיס ובהתאם, $MF = 0.5x$.



$\underline{\Delta EMF}$

$$\cos\sphericalangle EFM = \frac{MF}{EF}$$

$$\cos 70° = \frac{MF}{EF}$$

$$EF = \frac{0.5x}{\cos 70°}$$

$$\boxed{EF = 1.4619x}$$.

$\underline{\Delta EBF}$

$$\tan\sphericalangle BEF = \frac{BF}{EF}$$

$$\tan\sphericalangle BEF = \frac{0.5x}{1.4619x}$$

$$\sphericalangle BEF = 18.88°$$

$$\boxed{\sphericalangle BEA = 37.76°}$$

תשובה: גודל זווית הראש של הפאה הצדדית הוא $37.76°$.

(2) נתון כי נפח הפירמידה הוא 11 סמ"ק.

$\underline{\Delta EMF}$

$$\tan \sphericalangle EFM = \frac{EM}{MF}$$

$$\tan 70^\circ = \frac{EM}{0.5x}$$

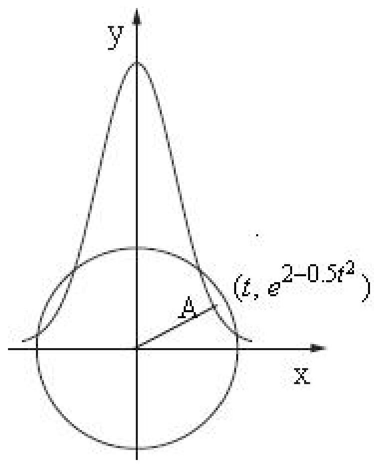
$$\boxed{EM = 1.3737x}$$

$$11 = \frac{x^2 \cdot 1.3737x}{3} \quad \rightarrow 33 = 1.3737x^3 \quad \rightarrow 24.022 = 1.3737x^3 \quad \rightarrow x = 2.885$$

תשובה: אורך צלע הבסיס של הפירמידה הוא 2.885 ס"מ.

נסמן $A(t, e^{2-0.5t^2})$ **נקודה על גרף הפונקציה** $f(x)=e^{2-0.5x^2}$ **.**

הפונקציה שיש להביא ***למינימום*** **היא** ***רדיוס המעגל הקנוני*** **, שמרכזו בראשית הצירים.**



$$R=\sqrt{(t-0)^2+(e^{2-0.5t^2}-0)^2}$$

$$\boxed{R=\sqrt{t^2+e^{4-t^2}}}$$

$$\boxed{R'=\frac{2t-2te^{4-t^2}}{2\sqrt{t^2+e^{4-t^2}}}}$$

$$0=\frac{2t-2te^{4-t^2}}{2\sqrt{t^2+e^{4-t^2}}}$$

$$0=2t-2te^{4-t^2}$$

$$0=2t(1-e^{4-t^2})$$

$$\boxed{t=0} \quad \boxed{t=\pm 2}$$

$$R(3)=\sqrt{3^2+e^{4-3^2}}=3.001$$

$$R(2)=\sqrt{2^2+e^{4-2^2}}=\sqrt{5}$$

$$R(0)=\sqrt{0^2+e^{4-0^2}}=e^2$$

$$t=2 \quad Min$$

כיוון שקל לראות שפונקצית הרדיוס רציפה וזוגית,

הרי שגם עבור $t=-2$ **נקבל רדיוס מינימלי, ובהתאם עבור** $t=0$ **נקבל רדיוס מקסימלי.**

נשים לב, שבמקרה זה נקבל שהמעגל משיק לפונקציה (הן עבור $x=2$ **והן עבור** $x=-2$ **),**

כי אם היה חותך את הפונקציה הרי שהיינו מקבלים שחלק מהעקום של הפונקציה נמצא בתוך המעגל,

והמרחק בין נקודות עליו למרכז המעגל היה קצר יותר וזו סתירה לכך שקבלנו מינימום.

תשובה: הרדיוס המינימלי הוא $\sqrt{5}$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{a}{(a^2+1)(ax+1)}$ **, כאשר** a **הוא פרמטר בפונקציה זו.**

נתון כי הפונקציה $F(a)$ **, בתחום** $a\ge 0$ **, מקיימת** $F(a)=\int_0^a f(x)\,dx$

$$F(a)=\int_0^a -\frac{a}{(a^2+1)(ax+1)}\,dx$$

$$F(a)=-\frac{\cancel{a}\ell n|ax+1|}{(a^2+1)\cancel{a}}\Big]_0^a$$

$$F(a)=\left(-\frac{\ell n|a^2+1|}{a^2+1}\right)-\left(-\frac{\ell n|a\cdot 0+1|}{a^2+1}\right)$$

$$\boxed{F(a)=-\frac{\ell n(a^2+1)}{a^2+1}} \quad \leftarrow a^2+1>0$$

תשובה: $F(a)=-\frac{\ell n(a^2+1)}{(a^2+1)}$

ב. (1) נמצא את נקודות הקיצון , בתחום $a\ge 0$ **.**

$$F'(a)=-\frac{\frac{(a^2+1)\cdot 2a}{a^2+1}-2a\ell n(a^2+1)}{(a^2+1)^2}\to \boxed{F'(a)=\frac{2a(1-\ell n(a^2+1))}{(a^2+1)^2}}$$

$$0=2a(1-\ell n(a^2+1))$$

$$,\boxed{a=0}\quad end\ point$$

$$\ell n(a^2+1)=1 \quad \to a^2+1=e \quad \to a=\sqrt{e-1} \quad \leftarrow a\ge 0$$

$$F(0)=-\frac{\ell n(0^2+1)}{0^2+1}=0,\ F(\sqrt{e-1})=-\frac{\ell n(\sqrt{e-1}^2+1)}{\sqrt{e-1}^2+1}=-\frac{1}{e}=-0.368,\ F(\sqrt{2e-1})=-0.311$$

סוג נקודות הקיצון נקבע על פי ערכי הפונקציה, לכן חושַב ערכה בנקודה שבה $x=\sqrt{2e-1}$ **.**

תשובה: $(0,0),Max$ **,** $(\sqrt{e-1},-\frac{1}{e}),Min$.

(2) מעבר לנקודה $(0,0)$ **, אין נקודות חיתוך נוספות עם הצירים, כי הפונקציה שלילית לכל** $a\ge 0$ **.**

הסבר: המקדם שלילי, המכנה חיובי, וערכי פונקציית ה- $\ell n(a^2+1)$ **חיוביים כי הארגומנט גדול מ-** 1 **.**

תשובה: $(0,0)$ **.**

ג. הסקיצה המתאימה: