א. נסמן ב- x את הזמן (בשעות) שהצינור הזרים מים עד ההפסקה.

פועל	הספק לשעה (מ"ק לשעה)	זמן (שעות)	עבודה (מ"ק כולל)
עד ההפסקה	$\frac{10}{x}$	x	10
הפסקה	-	$\frac{1}{3}$	-
אחרי ההפסקה	$\frac{10}{x}+3=\frac{10+3x}{x}$	$\frac{20x}{10+3x}$	20
30 מ"ק רצוף	$\frac{10}{x}$	$3x$	30

הזמן שהצינור הזרים מים, כולל ההפסקה שווה לזמן שהיה נדרש לו למלא 30 מ"ק ללא הפסקה בקצב המקורי.

נפתור את המשוואה המתאימה.

$$3x = x+\frac{1}{3}+\frac{20x}{10+3x}$$

$$2x=\frac{1}{3}+\frac{20x}{10+3x} \quad /3(10+3x)$$

$$6x(10+3x)=10+3x+60x$$

$$60x+18x^2=10+63x$$

$$18x^2-3x-10=0$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 27}{36} \quad \to x=\frac{5}{6}, \quad \cancel{x=-\frac{2}{3}} \quad \Leftarrow x>0$$

תשובה: הצינור הזרים מים עד ההפסקה במשך $\frac{5}{6}$ שעה (50 דקות).

ב. הצינור ממלא כל שעה $\frac{10}{5/6}=12$ מ"ק מים.

במשך 18 שעות הוא ממלא שליש בריכה, כלומר בריכה מלאה ב- 54 שעות,

ומכאן שנפח הבריכה $54\cdot12=648$ מ"ק מים.

שני הברזים מזרימים מים בקצב אחיד ובאותו פרק זמן, מכאן שכל אחד מהם ממלא $648:2=324$ מ"ק מים.

נסמן ב- y (שעות) את הזמן שבו שני הצינורות ממלאים את הבריכה,

ולכן $\frac{324}{y}$ הוא ההספק לשעה של כל אחד מהצינורות,

כאשר הספק הצינור המקורי היה 12 מ"ק לפני ההפסקה ו- 15 מ"ק לאחר ההפסקה.

$$12<\frac{324}{y}<15$$

$$\boxed{21.6<y<27}$$

תשובה: תחום השעות, של הזמן ששני הצינורות ממלאים את הבריכה, הוא בין 21.6 ל- 27 שעות.

א. נתון השוויון $\frac{1}{(3n-2)^2}-\frac{1}{(3n+1)^2}=\frac{18n-3}{(3n-2)^2(3n+1)^2}$

ניתן לראות כי אגף ימין של השוויון מתאים לכל אחד מאיברי הסדרה הנתונה, עבור כל n טבעי.

$$\frac{15}{1^2\cdot 4^2}+\frac{33}{4^2\cdot 7^2}+\frac{51}{7^2\cdot 10^2}+\ldots+\frac{18n-3}{(3n-2)^2(3n+1)^2}.$$

נבצע פירוק של כל אחד מהאיברים, על פי השוויון הנתון:

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{10^2}+\ldots-\frac{1}{(3n-2)^2}+\frac{1}{(3n-2)^2}-\frac{1}{(3n+1)^2}$$

למעט המחובר הראשון והאחרון, כל שני איברים סמוכים הם ביטויים נגדיים וסכומם אפס.

תשובה: $\frac{15}{1^2\cdot 4^2}+\frac{33}{4^2\cdot 7^2}+\frac{51}{7^2\cdot 10^2}+\ldots+\frac{18n-3}{(3n-2)^2(3n+1)^2}=1-\frac{1}{(3n+1)^2}$

ב. בעמוד הבא

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $1-\frac{1}{(3\cdot 1+1)^2}=\frac{15}{16}$ **אגף שמאל:** $\frac{15}{1^2\cdot 4^2}=\frac{15}{16}$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{15}{1^2\cdot 4^2}+\frac{33}{4^2\cdot 7^2}+\frac{51}{7^2\cdot 10^2}+...+\frac{18k-3}{(3k-2)^2(3k+1)^2}=1-\frac{1}{(3k+1)^2}$ **,**

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.

כלומר, $\frac{15}{1^2\cdot 4^2}+\frac{33}{4^2\cdot 7^2}+\frac{51}{7^2\cdot 10^2}+...+\frac{18k-3}{(3k-2)^2(3k+1)^2}+\frac{18(k+1)-3}{(3(k+1)-2)^2(3(k+1)+1)^2}=1-\frac{1}{(3(k+1)+1)^2}$

נחליף, את הביטוי המסומן, על פי הנחת האינדוקציה

$$\underset{\downarrow}{\underline{\frac{15}{1^2\cdot 4^2}+\frac{33}{4^2\cdot 7^2}+\frac{51}{7^2\cdot 10^2}+...+\frac{18k-3}{(3k-2)^2(3k+1)^2}}}+\frac{18k+15}{(3k+1)^2(3k+4)^2}=1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{(3k+1)^2}+\frac{18k+15}{(3k+1)^2(3k+4)^2}=1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{(3k+4)^2-(18k+15)}{(3k+1)^2(3k+4)^2}=1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{9k^2+6k+1}{(3k+1)^2(3k+4)^2}=1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{(3k+1)^2}{(3k+1)^2(3k+4)^2}=1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{(3k+4)^2}=1-\frac{1}{(3k+4)^2}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$, הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
אז היא נכונה עבור $n=k+1$ לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

א. (1) לפונקציה שתי אסימפטוטות אנכיות $x=4$ ו- $x=-1$, נעלה אותן על מערכת הצירים.

לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=0$, כיוון שהפונקציה רציונאלית, הגרף ישאף לציר ה- x , הן לקרן החיובית והן לקרן השלילית.

הפונקציה מוגדרת עבור כל $x\neq 1$ ו- $x\neq 4$, לכן הגרף של הפונקציה יורכב משלושה ענפים.

$f(0)>0$, לכן נסמן נקודה על הקרן החיובית של ציר ה- y .

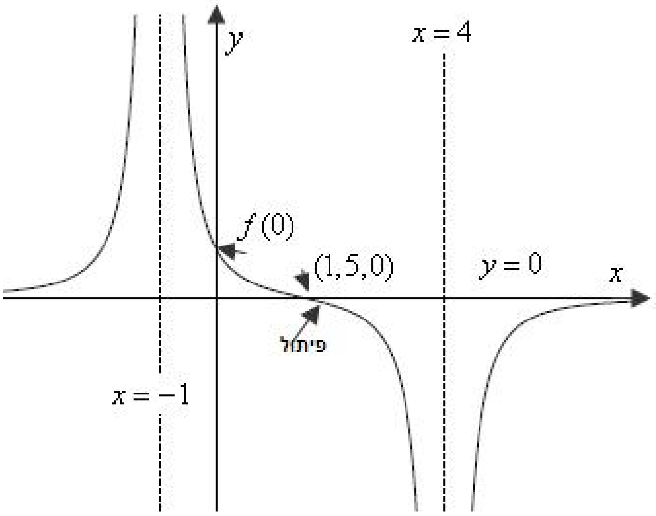
$f(1.5)=0$, לכן נסמן את הנקודה $(1,5,0)$ על ציר ה- x .

$f'(x)<0$ רק עבור $-1<x<4$, ומכיוון שהפונקציה רציונאלית, הרי שבשאר התחומים היא עולה.

$f(x)<0$ עבור $x>4$ לכן בתחום זה הגרף יהיה מתחת לציר ה- x ושואף לאסימפטוטות $x=4$ ו- $y=0$.

$f(x)>0$ עבור $x<-1$ לכן בתחום זה הגרף יהיה מעל לציר ה- x ושואף לאסימפטוטות $x=-1$ ו- $y=0$.

תשובה: סקיצה אפשרית:



(2) בתחום $-1<x<4$ גרף הפונקציה עובר מקעירות כלפי מעלה (עקב השאיפה ל- $x=-1$ בתחום של הירידה) לקעירות כלפי מטה (עקב השאיפה ל- $x=4$ בתחום של הירידה), כלומר לגרף הנגזרת תהייה נקודת קיצון מסוג מקסימום, כי הנגזרת תעבור מעלייה לירידה בנקודה זו (ולכן הנגזרת שלה $f''(x)$ מחיובית לשלילית).

בציור מסומנת נקודת פיתול אפשרית.

הערה: לא ניתן לשלול אפשרות של נקודות פיתול נוספות בתחום זה,

אך בכל מקרה תהיינה מספר אי זוגי של נקודות פיתול, ובהתאם נקודת מקסימום אחת יותר מנקודת מינימום של פונקציית הנגזרת.

תשובה: נקודת מקסימום אחת לפחות, ותתכנה זוגות נוספים של נקודות קיצון.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x)=\frac{3a-3bx}{(x^2-ax+c)^2}$

כיוון שהפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=-1$ **ו-** $x=4$ **.**

הרי שהביטוי במכנה הוא $((x-4)(x+1))^2=(x^2-3x-4)^2$ **ולכן** $a=3, c=-4$ **.**

הביטוי במונה מתאפס עבור $x=1.5$ **ולכן** $3\cdot3-3b\cdot1.5=0$ **ובהתאם** $b=2$

בהתאם הפונקציה היא $f(x)=\frac{9-6x}{(x^2-3x-4)^2}$ **.**

נציב $x=-2$ **:** $f(-2)=\frac{9-6(-2)}{((-2)^2-3(-2)-4)^2}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}\rightarrow(-2,\frac{7}{12})$

תשובה: $(-2,\frac{7}{12})$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=4\sin^2 x\cos^2 x$ בתחום $0\le x\le \text{®}$.

הפתרון המוצג כאן מבוסס על מחזוריות והמידע הקיים על פונקציית ה - $\sin x$.

על פי הנוסחה של זווית כפולה $\sin 2x=2\sin x\cos x$, נקבל ש- $f(x)=\sin^2 2x$.

גרף הפונקציה $\sin x$ מתואר בסקיצה הבאה, בקו אדום, עם נקודות חיתוך עם הצירים וקיצון ידועות.

גרף הפונקציה $\sin 2x$ הוא כיווץ של $\sin x$ עקב הגדלת המחזוריות, ומתואר בקו צהוב.

ערכי הפונקציה $\sin 2x$ עבור $x=\frac{t}{2}$ יהיו שווים לערכי הפונקציה $\sin x$ עבור $x=t$.

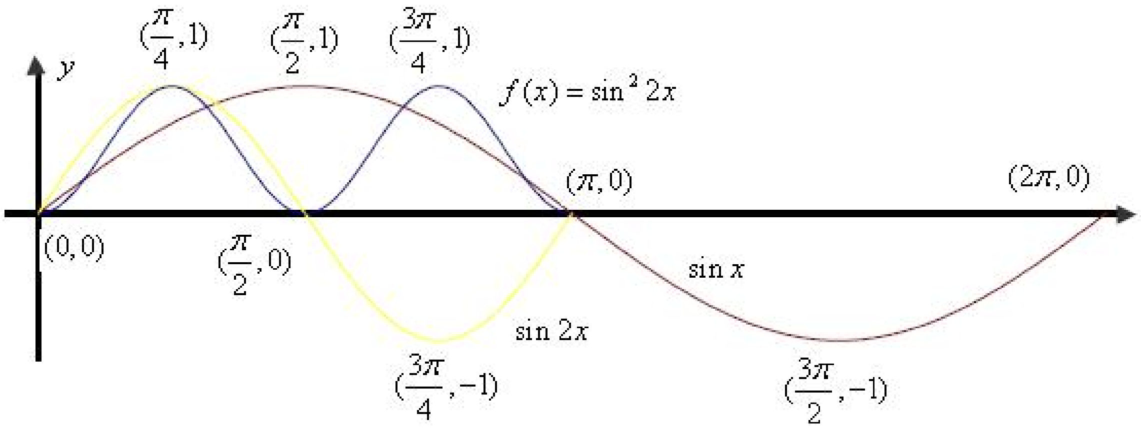
גרף הפונקציה $f(x)=\sin^2 2x$ הופך את הגרף של $\sin 2x$ *לאי-שלילי* .

כאשר ערכי ה- y של $\sin^2 2x$ קטנים בערכם המוחלט מערכי הפונקציה $\sin 2x$,
למעט הערכים בנקודות הקיצון שבהם ערכם המוחלט נשאר 1.
נסמן גרף זה בכחול.

המעבר לפונקציה אי שלילית יוצר נקודת קיצון נוספת $(\frac{\text{®}}{2},0)$ מסוג מינימום,
כי הנקודה הפכה מנקודת חיתוך עם ציר ה- x לנקודת השקה לציר ה- x .
ומשנה סוג של אחרת $(\text{®},0)$ כי הפכה מנקודת מקסימום קצה לנקודת מינימום קצה.

נציג את כל ערכי הפונקציות בטבלה מרכזת:

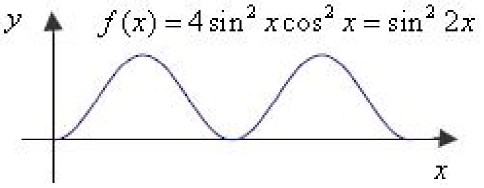
	$\sin x$ **בתחום** $0\le x\le 2\pi$	$\sin 2x$ **בתחום** $0\le x\le \pi$	$\sin^2 2x$ **בתחום** $0\le x\le \pi$
נקודת חיתוך ציר y	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
נקודת חיתוך ציר x	$(0,0)$ **,** $(\pi,0)$ **,** $(2\pi,0)$	$(0,0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(\pi,0)$	$(0,0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(\pi,0)$
נקודות קיצון קצה	$(0,0)$ **מינימום** $(2\pi,0)$ **מקסימום**	$(0,0)$ **מינימום** $(\pi,0)$ **מקסימום**	$(0,0)$ **מינימום** $(\pi,0)$ **מינימום**
נקודות קיצון פנימיות	$(\frac{\pi}{2},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{2},-1)$ **מינימום**	$(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{4},-1)$ **מינימום**	$(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום** $(\frac{3\pi}{4},1)$ **מקסימום**



תשובה: $(0,0)$ **,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(\pi,0)$ **.**

ב. תשובה: $(0,0)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{4},1)$ **מקסימום ,** $(\frac{\pi}{2},0)$ **מינימום,** $(\frac{3\pi}{4},1)$ **,** $(\pi,0)$ **מינימום.**

ג. הסקיצה המתאימה, כפי שהוסבר בסעיף א:



ד. (1) $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 2x)$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sin^2 2x$$

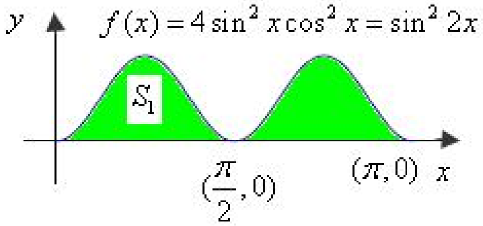
$$g'(x)=\sin^2 2x=f(x)$$

הוכח.

(2) עקב הסימטריה של $\sin 2x$ לציר ה- x , בתחום $0\le x\le ®$,

הרי שגם אחרי המעבר לפונקציה $f(x)=\sin^2 2x$

תהיה פונקציה $f(x)$ סימטרית משני צידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$, ולכן יהיו שני השטחים המסומנים שווים בשטחם.



$$S_1=\int_0^{\frac{®}{2}} f(x)\,dx=$$

$$S_1=g(x)\Big]_0^{\frac{®}{2}}=$$

$$S_1=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)\Big]_0^{\frac{®}{2}}$$

$$S_1=(\frac{1}{2}\cdot\frac{®}{2}-\frac{1}{8}\sin(4\cdot\frac{®}{2})-(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{8}\sin(4\cdot 0)$$

$$S_1=\frac{®}{4}$$

ולכן סכום השטחים המסומנים הוא $\frac{®}{2}$

תשובה: גודל השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא $\frac{®}{2}$.

5

א.

$\sphericalangle DAB = \sim$ **(נתון)**

AB **קוטר במעגל (נתון)**

$\sphericalangle ADB = 90^\circ$ **(זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה)**

$\sphericalangle DBA = 90^\circ - \sim$ **(סכום זוויות ב-** ΔADB **הוא** 180°**)**

$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DBA = 90^\circ - \sim$ **(בטרפז שווה שוקיים הקטעים היוצאים מאותו בסיס שווים,**
ובהתאם זוויות אלו שוות במשולש שווה שוקיים ΔALB **)**

$\sphericalangle DAC = 2\sim - 90^\circ$ **(הפרש זוויות)**

$\frac{KL}{LM} = \frac{DL}{LB}$ **(משפט תאלס הרחבה 2)**

$\frac{DL}{LB} = \frac{DL}{LA}$ **(הראינו כי** ΔALB **שווה שוקיים)**

$\underline{\Delta ALD}$

$$\sin(2\alpha - 90^\circ) = \frac{DL}{LA}$$

$$\frac{DL}{LA} = -\sin(90^\circ - 2\alpha)$$

$$\frac{DL}{LA} = -\cos 2\alpha$$

ולכן $\boxed{\frac{KL}{LM} = -\cos 2\alpha}$ **על פי כלל המעבר**

תשובה: $\frac{KL}{LM} = -\cos 2\alpha$

ב. נתון כי $\sim = 60^\circ$ **, ושטח המשולש** DLC **הוא** S **.**

בהינתן ש- $\sim = 60^\circ$ **הרי שמתקבלים משולשים שווי צלעות:** $\Delta ADM, \quad \Delta BCM, \quad \Delta DCM$ **,**
החופפים זה לזה (בכל משולש יש שני רדיוסים, כלומר הם שווי שוקיים, עם זווית 60° **ולכן שווי צלעות).**
המרובע $DCMA$ **הוא מקבילית, שבה האלכסונים חוצים זה את זה,**
ו- KM **הוא אנף אמצעי לקוטר** AB **במשולש** ACB **החסום במעגל.**
לכן L **נקודת מפגש תיכונים במשולש** DMC**, המחלקת את התיכון ביחס של** $2:1$ **.**
מכאן שאם שטח המשולש DLC **הוא** S**, הרי ששטח משולש** DMC **הוא** $3S$**,**
כי לצלע משותפת CD**, יש גבהים שהיחס ביניהם הוא** $3:1$ **.**
תשובה: שטח משולש DMC **הוא** $3S$**.**