א. נסמן ב- x את מהירות הרוכב השני שיצא מ- A ולכן מהירות הרוכב הראשון $x+m$.

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	מהירות - v קמ"ש	זמן - t שעות	דרך-מרחק - s ק"מ
רוכב ראשון	$x+m$	$\frac{45}{x+m}$	45
רוכב שני	x	$\frac{20}{x}$	20

הרוכב השני נסע שעה אחת פחות, עד אשר הרוכב הראשון הגיע ל- B

המשוואה המתאימה, אם כן, היא $\frac{45}{x+m}=\frac{20}{x}+1$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{45}{x+m}=\frac{20}{x}+1 \quad / \cdot x(x+m)\neq 0$$
$$45x=20(x+m)+x(x+m)$$
$$45x=20x+20m+x^2+mx$$
$$x^2+(m-25)x+20m=0$$
$$x_{1,2}=\frac{25-m\pm\sqrt{(m-25)^2-80m}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{25-m\pm\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$$

על פנת שיהיה פתרון לבעיה, נדרש $\Delta\geq 0$

$$m^2-130n+625\geq 0$$
$$m_{1,2}=\frac{130\pm 120}{2} \quad \rightarrow m=125,\ m=5$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, הרי ש: $m\geq 125$ **או** $m\leq 5$

כיוון שנתון כי $0<m<5$ **, הרי שיש שני פתרונות לבעיה.**

תשובה: $x_1=\frac{25-m+\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$, $x_2=\frac{25-m-\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$

ב. נדרש $x_1 - x_2 < 11$ (לא צריך ערך מוחלט כי סימנו את x_1 כפתרון הגדול מבין השניים.)

$$x_1 - x_2 - = \frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} - \frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}$$

$$\sqrt{m^2 - 130m + 625} < 11$$

ניתן להעלות בריבוע, ללא חשש מפתרונות זרים, כי עבור $0 < m < 5$ הראינו שהביטוי בתוך השורש חיובי

$$m^2 - 130m + 625 < 121$$

$$m^2 - 130m + 504 < 0$$

$$m_{1,2} = \frac{130 \pm 122}{2} \quad \rightarrow m = 4, \quad m = 126$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, נקבל $4 < m < 126$

ובחיתוך עם התנאי $0 < m < 5$ נקבל $4 < m < 5$

תשובה: $4 < m < 5$

א. נציב $n=2$ **ולאחר מכן** $n=4$ **ונקבל שתי משוואות בשני נעלמים**

$$n=2 \quad \to 1^2-3^2=a\cdot 2^2+b\cdot 2 \quad \to \boxed{-8=4a+2b}$$

$$n=4 \quad \to 1^2-3^2+5^2-7^2=a\cdot 4^2+b\cdot 4 \quad \to \boxed{-32=16a+4b}$$

$$\begin{cases}-8=4a+2b & \cdot(-2)\\ -32=16a+4b\end{cases}$$

$$+\begin{cases}16=-8a-4b\\ -32=16a+4b\end{cases}$$

$$-16=8a \quad \to \boxed{a=-2} \quad \to -8=4\cdot(-2)+2b \quad \to \boxed{b=0}$$

תשובה: $a=-2$ **,** $b=0$

ב. יש להוכיח כי $1^2-3^2+5^2-7^2+\ldots-(2n-1)^2=-2n^2$

(1) הטענה התקבלה כנתון, בסעיף א', עבור $a=-2$ **,** $b=0$ **,** $n=2$

(2) נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^2-3^2+5^2-7^2+\ldots-(2k-1)^2=-2k^2$

(3) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$ **, לכן צ"ל**

$$\underbrace{1^2-3^2+5^2-7^2+\ldots-(2k-1)^2}+(2k+1)^2-(2k+3)^2=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2k^2 \quad +4k^2+4k+1-(4k^2+12k+9)=-2(k+2)^2$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו, לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow -2k^2+\cancel{4k^2}+4k+1\cancel{-4k^2}-12k-9=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2k^2-8k+8=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2(k^2+4k+4)=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2(k+2)^2=-2(k+2)^2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

(4) בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי זוגי כלשהו, אז היא נכונה עבור** $n=k+2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

ג. נתון כי $1^2-3^2+5^2-7^2+\ldots+c^2=1921$ **ובהתאם נסמן:** $c=2n+1$ **כי יש לו מקדם חיובי.**

כלומר: $1^2-3^2+5^2-7^2+\ldots-(2n-1)^2+(2n+1)^2=1921$

על פי סעיף ב : $-2n^2+(2n+1)^2=1921$

$$2n^2+4n-1920=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-4\pm 124}{4} \quad \to n=30, \quad n=-32$$

n **כנדרש הוא טבעי זוגי ובהתאם** $c=2\cdot 30+1=61$

תשובה: $c=61$

א. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$

$$f'(x) = 1 - \cos 2x$$
$$f'(x) = 1 - (1 - 2\sin^2 x)$$
$$\boxed{f'(x) = 2\sin^2 x}$$

הוכַח !

ב. (1) פונקציית הנגזרת אי-שלילית (כאשר $\sin x = 0$ $f'(x) = 0$ **), כלומר עבור** $x \neq ®k$ **ולכן הפונקציה עולה לכל** x **.**

עבור $x = ®k$ **יהיה המשיק מקביל לציר ה-** x **, אך אלו תהיינה נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.**

תשובה: לפונקציה $f(x)$ **אין נקודות קיצון.**

(2) כפי שהראינו, עבור $x = ®k$ **יש נקודות פיתול, בהן המשיק מקביל לציר ה-** x **, אך תיתכנה נוספות:**

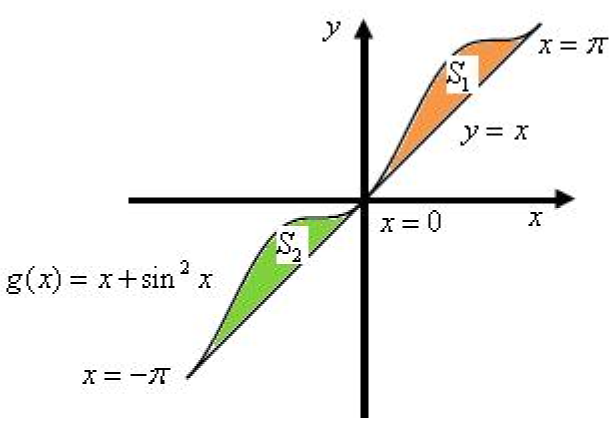
$$f''(x) = 4\sin x \cos x$$
$$\boxed{f''(x) = 2\sin 2x}$$
$$\sin 2x = 0 \quad \to x = \frac{®}{2}k$$

כלומר, נקודות פיתול תהיינה עבור $x = \frac{®}{2}k$ **(הערה – ניתן להסתפק בהסבר של סעיף ב (1))**

תשובה: לפונקציה $f(x)$ **יש נקודות פיתול**

ג. נמצא את נקודות החיתוך בין $g(x) = x + \sin^2 x$

לישר $y = x$ **, בתחום** $-® \le x \le ®$ **.**

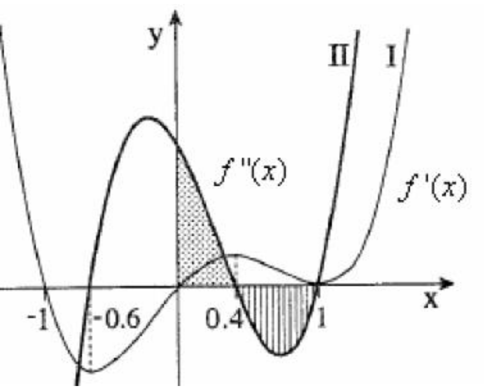


$$x + \sin^2 x = x$$
$$\sin^2 x = 0$$
$$\sin x = 0$$
$$x = -®, \quad x = 0 \quad , x = ®$$

$x + \sin^2 x \ge x$ **ולכן גרף הפונקציה** $g(x)$ **מעל לישר** $y = x$

$$S = \int_0^® (x + \sin^2 x - x)\,dx + \int_{-®}^0 (x + \sin^2 x - x)\,dx$$
$$S = \int_0^® (\sin^2 x\,dx + \int_{-®}^0 (\sin^2 x)\,dx$$
$$S = (\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4})\Big]_0^® + (\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4})\Big]_{-®}^0 \quad \leftarrow \quad א$$
$$S = ((\frac{®}{2} - \frac{\sin(2®)}{4}) - (\frac{0}{2} - \frac{\sin(2\cdot 0)}{4})) + ((\frac{0}{2} - 4) - (\frac{®}{2} - \frac{\sin(2®)}{4}))$$
$$S = \frac{®}{2} + \frac{®}{2}$$
$$\boxed{S = ®}$$

תשובה: ® יח"ר



א. כאשר ל: $f'(x)$ יש נקודת קיצון, הרי שבוודאות $f''(x)=0$

גרף I מתקיים קיצון עבור $x=0.4$ וגרף II מתאפס שם,

גרף I מתקיים קיצון עבור $x=-0.6$ וגרף II מתאפס שם.

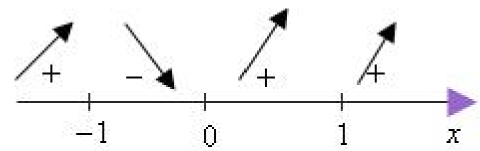
תשובה: גרף I - $f'(x)$, גרף II - $f''(x)$

ב. נראה, בסיוע הגרף הנתון של פונקציית הנגזרת הראשונה

טבלת עלייה ירידה של $f(x)$.

בתחום $x>0$ או $x<-1$ $f'(x)$ אי-שלילית ולכן $f(x)$ עולה.

בתחום $-1<x<0$ $f'(x)$ שלילית ולכן $f(x)$ יורדת.



בהתאם: $x=0$ מינימום , $x=-1$ מקסימום ($x=1$ פיתול)

תשובה: $x=0$ מינימום , $x=-1$ מקסימום

ג. נראה, בסיוע הגרף הנתון של פונקציית הנגזרת השנייה

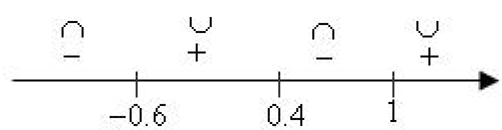
טבלת קעירות של $f(x)$.

בתחום $x>1$ או $-0.6<x<-0.4$ מתקיים $f''(x)>0$

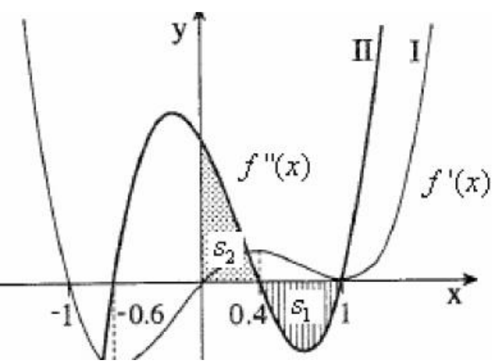
ובהתאם $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$.

בתחום $0.4<x<1$ או $x<-0.6$ מתקיים $f''(x)<0$

ולכן $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$.



תשובה: $x=1$, $x=0.4$, $x=-0.6$ נקודת פיתול



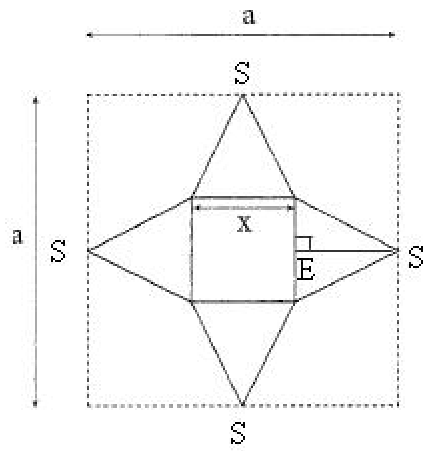
ד. נחשב כל שטח בנפרד

$$S_1=\int_{0.4}^{1}(0-f''(x))\,dx=-f'(x)\Big]_{0.4}^{1}=-f'(1)+f'(0.4)=-0+f'(0.4)=f'(0.4)$$

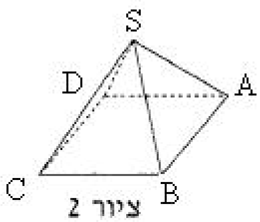
$$S_2=\int_{0}^{0.4}(f''(x)-0)\,dx=f'(x)\Big]_{0}^{0.4}=f'(0.4)-f'(0)=f'(0.4)-0=f'(0.4)$$

כלומר: $S_1=S_2$

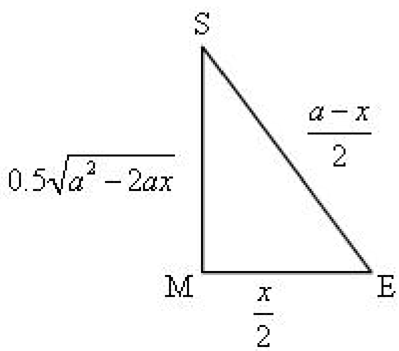
תשובה: הוכַח !



ציור 1



ציור 2



א. אורך גובה (גם תיכון) של פאה צדדית SAB **הוא** $\frac{a-x}{2}$:

את גובה הפירמידה נמצא במשולש ישר הזווית SME**,**

כאשר M **מפגש אלכסוני הריבוע, ו-** $ME=\frac{x}{2}$ **(ק.א. ב-** ΔACB**)**

<u>משפט פיתגורס</u>

$$SE^2=SM^2+ME^2$$

$$SM=\sqrt{(\frac{a-x}{2})^2-(\frac{x}{2})^2}$$

$$SM=\sqrt{\frac{a^2-2ax+x^2-x^2}{4}}$$

$$\boxed{SM=0.5\sqrt{a^2-2ax}}$$

תשובה: גובה הפירמידה הוא $0.5\sqrt{a^2-2ax}$

ב. הפונקציה שיש להביא למקסימום **היא** נפח הפירמידה

כלומר שליש מכפלת שטח הבסיס בגובה הפירמידה:

$$\boxed{V=\frac{x^2\sqrt{a^2-2ax}}{6}}$$

$$V'=\frac{1}{6}\cdot(2x\sqrt{a^2-2ax}+\frac{-\not{2}ax^2}{\not{2}\sqrt{a^2-2ax}})$$

$$V'=\frac{1}{6}\cdot\frac{2x(a^2-2ax)-ax^2}{\sqrt{a^2-2ax}}$$

$$\boxed{V'=\frac{1}{6}\cdot\frac{2a^2x-5ax^2}{\sqrt{a^2-2ax}}}$$

$$0=2a^2x-5ax^2$$

$$0=ax(2a-5x)\quad\rightarrow x=0.4a,\quad \cancel{x=0}$$

מונה הנגזרת הוא פרבולה בעלת מקסימום, ולכן עבור $x=0.4a$ **הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות ← מקסימום.**

תשובה: אורך מקצוע הפירמידה $0.4a$ **עבורו נפח הפירמידה מקסימלי.**

ג. הזווית בין מישור הפאה SAB **לבסיס** ABCD **היא** $\angle SEM$ **שבין** SE **- האנך לישר החיתוך** AB **מ-** SAB

לבין ME **- האנך מהבסיס** ABCD **(** $ME \parallel CD$ **ולכן מאונך ל-** AB **):**

<u>ΔSME</u>

$$\cos\angle SEM=\frac{0.4a}{(a-0.4a)}=\frac{0.4a}{0.6a}=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\angle SEM=48.19^\circ}$$

תשובה: הזווית בין פאה צדדית לבסיס היא 48.19°**.**