א. נסמן ב- x את מהירות הרוכב בעליות (קמ"ש, קבועה) ובהתאם $x+10$ מהירותו בירידות.

נסמן ב- y אורך המסלול מ- E ל- B (ק"מ)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מ- A עד E	$\frac{70-y}{x}$	x	$70-y$
מ- E עד B	$\frac{y}{x+10}$	$x+10$	y
מ- B עד E	$\frac{y}{x}$	x	y
מ- E עד A	$\frac{70-y}{x+10}$	$x+10$	$70-y$

הרוכב עבר את הדרך מ- A ל- B ב- 4.5 שעות, והמשוואה המתאימה היא $\frac{70-y}{x}+\frac{y}{x+10}=4.5$

הרוכב עבר את הדרך מ- B ל- A ב- 6 שעות, והמשוואה המתאימה היא $\frac{y}{x}+\frac{70-y}{x+10}=6$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}\frac{70-y}{x}+\frac{y}{x+10}=4.5\\ \frac{y}{x}+\frac{70-y}{x+10}=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}(70-y)(x+10)+xy=4.5x(x+10)\\ y(x+10)+x(70-y)=6x(x+10)\end{cases}$$

$$\begin{cases}70x+700-xy-10y+xy=4.5x^2+45x\\ xy+10y+70x-xy=6x^2+60x\end{cases}$$

$$+\begin{cases}70x-10y+700=4.5x^2+45x\\ 70x+10y=6x^2+60x\end{cases}$$

$$140x+700=10.5x^2+105x$$

$$10.5x^2-35x-700=0 \quad \to x_{1,2}=\frac{35\pm175}{21} \quad \to x=10 \quad \leftarrow x>0$$

תשובה: מהירות הרוכב בעלייה 10 קמ"ש

ב. נציב $x=10$ במשוואה הראשונה: $\frac{70-y}{10}+\frac{y}{10+10}=4.5$

$$140-2y+y=90 \quad \to y=50$$

תשובה: אורך המסלול מ- E ל- B 50 ק"מ.

א. נתונה סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3 \to a_{n+1} - a_n = 2n + 3 \end{cases}$$

$$n-1\,lines \begin{cases} a_2 - a_1 = 2\cdot 1 + 3 \\ a_3 - a_2 = 2\cdot 2 + 3 \\ a_4 - a_3 = 2\cdot 3 + 3 \\ . \\ . \\ . \\ a_n - a_{n-1} = 2\cdot(n-1) + 3 \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = 2\cdot\frac{n-1}{2}(1+n-1) + 3(n-1)$$

$$a_n - 3 = n^2 - n + 3n - 3$$

$$a_n = n^2 + 2n$$

$$\boxed{a_n = n(n+2)}$$

ולמעשה הראינו כי הטענה נכונה עבור כל n טבעי, ומכאן שנכונה עבור כל n טבעי זוגי הוכַח!

<u>נראה גם הוכחה על ידי אינדוקציה</u>:

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 2$

נתון: $a_1 = 1$ **ולכן על פי כלל הנסיגה:** $a_2 = a_1 + 2\cdot 1 + 3 = 3 + 2 + 3 = 8$ **, על פי הטענה** $a_2 = 2\cdot(2+2) = 8$

לכן הטענה נכונה עבור $n = 2$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$ **טבעי זוכי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $a_k = k(k+2)$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 2$ **, לכן צ"ל**

$$a_{k+2} = (k+2)(k+4)$$

נשתמש פעמיים בכלל הנסיגה

$$a_{k+2} = a_{k+1} + 2(k+1) + 3 = \Leftrightarrow a_{k+2} = a_k + 2k + 3 + 2k + 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow a_{k+2} = k(k+2) + 4k + 8 \quad \leftarrow induction$$

$$\Leftrightarrow a_{k+2} = k^2 + 6k + 8 = (k+2)(k+4)$$

מתקבל שהוכחנו את נכונות הטענה עבור $n = k + 2$

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי זוגי

אז היא נכונה עבור $n=k+2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי זוגי.

ב. הראינו כי $a_n=n(n+2)$

כיוון שנתון כי n זוגי הרי שאחד מהגורמים מתחלק ב- 4 והשני מתחלק ב- 2.

לכן המכפלה מתחלקת ב- 8, ומכאן ש- a_n מתחלק ב- 8 לכל n זוגי.

הוכַח!

ג. נתון כי שני איברים במקומות זוגיים בסדרה מקיימים $n(a_{n+4}-a_{n+2})=41600$

על פי כלל הנסיגה: $a_{n+4}=a_{n+3}+2(n+3)+3=a_{n+3}+2n+9$

$$a_{n+3}=a_{n+2}+2(n+2)+3=a_{n+2}+2n+7$$
$$a_{n+4}=a_{n+2}+2n+7+2n+9$$
$$a_{n+4}-a_{n+2}=4n+16$$

לכן:

$$n(4n+16)=41600$$
$$4n^2+16n-41600=0$$
$$n_{1,2}=\frac{-16\pm 816}{8}$$
$$n=100 \quad \leftarrow n>0$$
$$a_{104}=104(104+2)=11,024$$
$$a_{102}=102(102+2)=10,608$$

תשובה: $a_{102}=10,608 \quad , \quad a_{104}=11,024$

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+a}$, נתון כי הפונקציה אינה מוגדרת רק עבור ערך אחד של x .

לכן המכנה הוא דו איבר ריבועי, כלומר $(x-3)^2$ ומכאן ש- $a=9$

תשובה: $a=9$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+9}$, או $f(x)=\frac{x^2+6x+12}{(x-3)^2}$ המוגדרת בתחום $x\neq 3$.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0+0}{1-0+0}=1$, לכן $y=1$ אסימפטוטה אופקית

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+9}==\frac{+}{0^+}=+\infty$, לכן $x=3$ אסימפטוטה אנכית

תשובה: $y=1$ אסימפטוטה אופקית , $x=3$ אסימפטוטה אנכית

(2) בנקודת חיתוך עם חיתוך עם ציר y מתקיים $x=0$ ונקבל $(0,\frac{4}{3})$

אין נקודת חיתוך עם ציר x כי הדיסקרימיננטה (Δ) של הטרינום הריבועי במונה שלילית.

תשובה: $(0,\frac{4}{3})$.

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{(2x+6)(x-3)^2-2(x-3)(x^2+6x+12)}{(x-3)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-3)((x+3)(x-3)-(x^2+6x+12)}{(x-3)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-3)(x^2-9-x^2-6x-12)}{(x-3)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x-3)(-6x-21)}{(x-3)^4}}$$

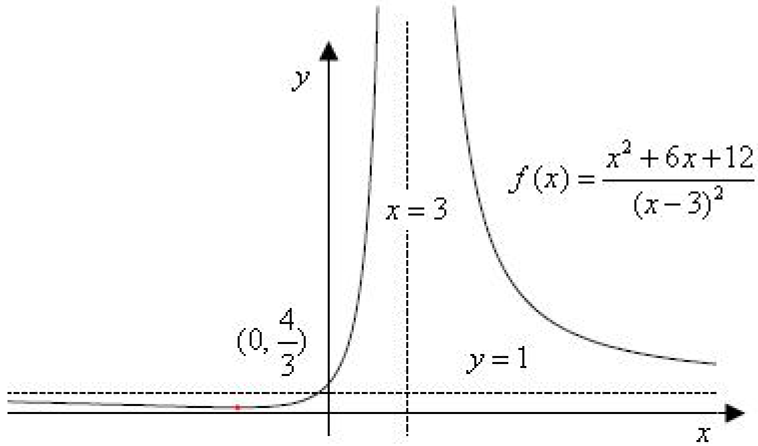
$$0=-6x-21 \quad \rightarrow x=-3.5$$

למונה נגזרת הפונקציה פרבולה בעלת מקסימום,

ולכן היא חיובית עבור $-3.5<x<3$ ושלילית עבור $x>3$ או $x<-3.5$

תשובה: $x>3$ או $x<-3.5$ ירידה , $-3.5<x<3$ עלייה.

(4) הסקיצה המתאימה



ג. $f'(x)=\frac{2(x-3)(-6x-21)}{(x-3)^4}$

(1) חזקת פולינום המכנה גדולה מחזקת פולינום המונה ולכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית**

$f'(x)=\frac{2(-6x-21)}{(x-3)^3}$ **, מכאן ש:** $x=3$ **מאפס מכנה ולא מונה ולכן** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית ,** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית**

(2) נגזרת הפונקציה מתאפסת רק עבור $x=-3.5$ **ולכן זו נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה-** x **.**

כפי שהראינו נגזרת הפונקציה חיובית עבור $-3.5<x<3$ **ושלילית עבור** $x>3$ **או** $x<-3.5$.

$$f'(x)=\frac{2(-6x-21)}{(x-3)^3}$$

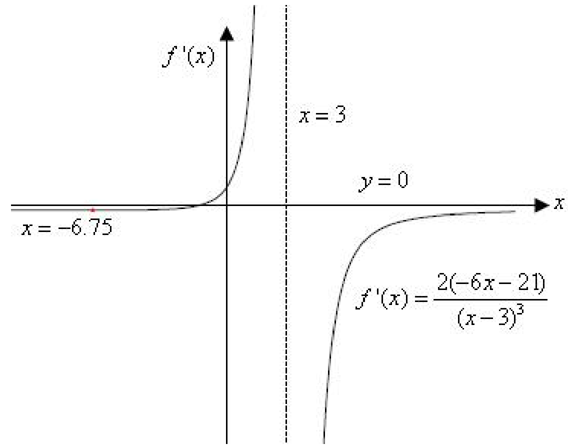
$$f''(x)=2\cdot\frac{-6(x-3)^3-3(x-3)^2(-6x-21)}{(x-3)^6}$$

$$f''(x)=6\cdot\frac{-2(x-3)-(-6x-21)}{(x-3)^4}$$

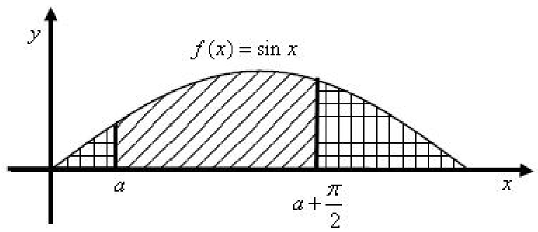
$$f''(x)=6\cdot\frac{-2x+6+6x+21}{(x-3)^4}$$

$$f''(x)=6\cdot\frac{4x+27}{(x-3)^4}$$

$$0=4x+27 \quad \rightarrow x=-6.75$$



f '(x)
x = 3
y = 0
x
x = −6.75
f '(x) = 2(−6x − 21)/(x − 3)^3



הפונקציה שיש להביא למקסימום היא יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$

$$S_1 = \int_a^{a+\frac{®}{2}} (\sin x - 0)\, dx$$

$$S_1 = (-\cos x) \Big]_a^{a+\frac{®}{2}}$$

$$S_1 = -\cos(a + \frac{®}{2}) + \cos a$$

$$\boxed{S_1 = \sin a + \cos a} \quad \leftarrow \cos(90° + \sim) = -\sin \sim$$

$$S_2 = \int_a^{®} (\sin x - 0)\, dx - S_1$$

$$S_2 = (-\cos x) \Big]_0^{®} - (\sin a + \cos a)$$

$$S_2 = -\cos ® + \cos 0 - \sin a - \cos a$$

$$\boxed{S_2 = 2 - \sin a - \cos a}$$

$$f(a) = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sin a + \cos a}{2 - \sin a - \cos a}$$

$$f\,'(a) = \frac{(\cos a - \sin a)(2 - \sin a - \cos a) - (\sin a + \cos a)(-\cos a + \sin a)}{(2 - \sin a - \cos a)^2}$$

$$f\,'(a) = \frac{(\cos a - \sin a)(2 - \sin a - \cos a + \sin a + \cos a)}{(2 - \sin a - \cos a)^2}$$

$$\boxed{f\,'(a) = \frac{2(\cos a - \sin a)}{(2 - \sin a - \cos a)^2}}$$

$$0 = \cos a - \sin a$$

$$\tan a = 1 \quad \leftarrow \cos a, \sin a \neq 0 \quad \leftarrow 0 < a < \frac{®}{2}$$

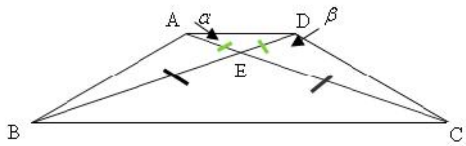
$$a = \frac{®}{4} + ® k \quad \rightarrow \boxed{a = \frac{®}{4}} \leftarrow k = 0$$

פתרונות אחרים *לא* בתחום האפשרי $0 < a < \frac{\circledR}{2}$.

$$f\,'(\frac{\circledR}{6}) = \frac{2(\cos\frac{\circledR}{6} - \sin\frac{\circledR}{6})}{+} = \frac{0.73}{+} > 0, \quad f\,'(\frac{\circledR}{3}) = \frac{2(\cos\frac{\circledR}{3} - \sin\frac{\circledR}{3})}{+} = \frac{-0.73}{+} < 0$$

הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן, עבור $a = \frac{\circledR}{4}$ **יחס השטחים** $\frac{S_1}{S_2}$ **הוא מקסימלי.**

תשובה: $a = \frac{\circledR}{4}$



א. $\angle CAD = \sim$ **(נתון)**

$ABCD$ **טרפז שווה שוקיים (נתון)**

ובהתאם משולשים AED **ו-** BEC **שווי שוקיים, עם זוויות בסיס** $\sim$ **,**

כי הקטעים היוצאים מבסיסי הטרפז שווים זה לזה ובסיסי הטרפז

מקבילים והזוויות המתאימות שוות

לכן, המשולשים דומים (משפט דמיון ז.ז.) ויחס השטחים הוא כריבוע

יחס הצלעות המתאימות: $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = (\frac{AE}{EC})^2 = (\frac{DE}{EB})^2$

כאמור: $BE = CE$ **, ולכן:** $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = (\frac{DE}{EC})^2$

$\angle ACD = 180° - (2\sim + \quad)$ **(סכום זוויות במשולש** $180°$ **הוא** ADC **)**

על פי משפט הסינוסים:

$\underline{\Delta DCE}$

$$\frac{DE}{\sin(180° - (2\sim + \quad))} = \frac{CE}{\sin}$$

$$\frac{DE}{CE} = \frac{\sin(2\sim + \quad)}{\sin}$$

ולכן יחס השטחים הוא $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = \frac{\sin^2(2\sim + \quad)}{\sin^2}$

ב. $\sphericalangle BCD = 180° - (2\sim + \quad) + \sim = 180° - (\sim + \quad)$ **,** $\sphericalangle ABE = 180° - (2\sim + \quad)$

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{0.5 \cdot CD \cdot BC \cdot \sin\angle BCD}{0.5 \cdot AB \cdot BE \cdot \sin\angle ABE}$$

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{BC \cdot \sin(180° - (\sim + \quad))}{BE \cdot \sin(180° - (2\sim + \quad))}$$

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{2\cos\sim \cdot \sin(\sim + \quad)}{\sin(2\sim + \quad)}$$

$\underline{\Delta CBE}$

$$\frac{BC}{\sin(180° - 2\sim)} = \frac{BE}{\sin\sim}$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{2\sin\sim\cos\sim}{\sin\sim}$$

$$\frac{BC}{BE} = 2\cos\sim \qquad \rightarrow$$

ג. נתון כי יחס השטחים הוא $\sqrt{\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}}} = \frac{1}{4}$ ולכן יחס הצלעות המתאימות הוא $\frac{1}{4}$.

ובהתאם: $\sim \ = 30°$ $\frac{\sin(60° + \ )}{\sin} = \frac{1}{4}$

$$\frac{\sin 60° \cos \ \ + \cos 60° \sin}{\sin} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cot \ \ + 0.5 = 0.25$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cot \ \ = -0.25$$

$$-2\sqrt{3} = \tan$$

$$\boxed{\ = 106.1°}$$

תשובה: $= 106.1°$