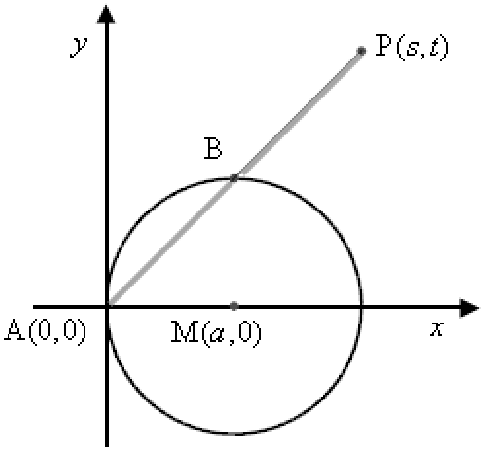


א. (1) נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:

נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=2ax$ **, או** $(x-a)^2+y^2=a^2$ **.**

כלומר מרכזו $\mathrm{M}(a,0)$ **ורדיוסו** a **, כאשר** $a>0$ **.**

כיוון שראשית הצירים על המעגל, הרי שזו הנקודה $\mathrm{A}(0,0)$ **.**

נסמן $\mathrm{P}(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי,**

על פי הנתונים $\mathrm{AB}=\mathrm{BP}$ **,**

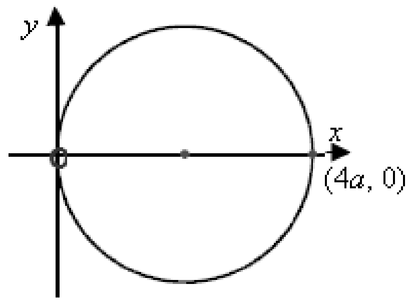
ולכן שיעורי הנקודה $\mathrm{B}(\frac{s}{2},\frac{t}{2})$ **ונציב הנקודה במשוואת המעגל:**

$$(\frac{s}{2})^2+(\frac{t}{2})^2=2a(\frac{s}{2})$$
$$\frac{s^2}{4}+\frac{t^2}{4}=as$$
$$s^2+t^2=4as$$
$$(s-2a)^2+t^2=4a^2$$

וזה המעגל $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ **כאשר** $x\neq 0$ **, כי נתון ששיעור ה-** x **של הנקודה** P **חיובי.**

תשובה: $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ **,** $x\neq 0$ **, מעגל שמרכזו** $(2a,0)$ **ורדיוסו** $2a$ **.**

(2) והסקיצה המתאימה:



ב. משוואת המעגל הקנוני, עם הרדיוס הזהה, היא $x^2+y^2=4a^2$

(1) נכפול ב- $\frac{2}{3}$ את שיעורי ה- y אז על מנת לקיים את המשוואה $x^2+y^2=4a^2$,

יש לכפול ב- $\frac{3}{2}$ את שיעורי ה- y של המקום הגיאומטרי החדש.

$$x^2+(\frac{3}{2}y)^2=4a^2 \quad \rightarrow \boxed{4x^2+9y^2=16a^2}$$

תשובה: $4x^2+9y^2=16a^2$, או $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{\frac{16a^2}{9}}=1$

(2) המקום הגיאומטרי הוא אליפסה, כאשר צירה הארוך $4a$ וצירה הקצר $2\frac{2}{3}a$.

א. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-16}=1$, $a\neq 4$, $a>0$.

(1) משוואת אליפסה קנונית היא מהצורה : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **, כאשר** $a,b>0$.

(אם $a>b$ **אז** $2a$ **הוא הציר הארוך, אך בשאלה הנתונה אין הגבלה)**

משוואת האליפסה הנתונה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16-a^2}=1$

נדרוש $16-a^2>0$ **ומתקבלת פרבולה בעלת מקסימום,**

ששורשיה הם ± 4 **ובהתאם עבור** $-4<a<4$

אם $16-a^2=a^2$ **ומכאן ש-** $a>0 \leftarrow \quad a=2\sqrt{2} \leftarrow \quad a^2=8 \leftarrow \quad 16=2a^2$

ונקבל מעגל, שהוא מקרה פרטי של אליפסה עבור $a=2\sqrt{2}$ **,**

בחיתוך עם התנאי $a,b>0$ **נקבל ש:** $0<a<4$

תשובה: $a\neq 2\sqrt{2}, \quad 0<a<4$.

אם נכיר בכך שמעגל קנוני הוא מקרה פרטי של אליפסה קנונית,

אז תיתכן גם התשובה: $0<a<4$

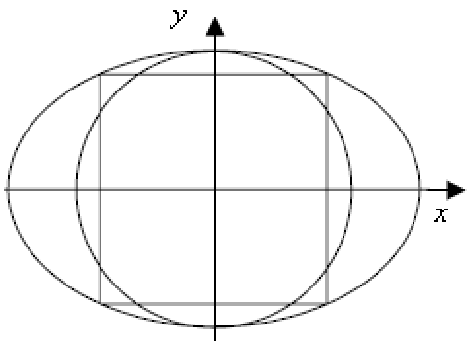
(2) משוואת מעגל היא מהצורה $(x-m)^2+(y-n)^2=R^2$

במקרה זה משוואת המעגל, עפ"י א (1) היא $x^2+y^2=8$

תשובה: $a=2\sqrt{2}$

ב. ידוע כי המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16-a^2}=1$ **מייצגת אליפסה, לכן** $a^2\neq 8, \quad 0<a^2<16$

כאשר על פי הציור האליפסה אינה מעגל לכן $a^2\neq 8, \quad 0<a^2<16$



שיעור נקודת החיתוך עם ציר ה- y **הם:** $(0,-\sqrt{16-a^2}), \quad (0,\sqrt{16-a^2})$

ולכן רדיוס המעגל הוא $\sqrt{16-a^2}$ **ושטחו:** $p\,(16-a^2)$.

צלעות הריבוע מקבילות לצירים, ושיעורי קדקודי הריבוע, בהתאם,
שווים בערכן המוחלט ולכן:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{16-a^2}=1 \quad \rightarrow x^2=\frac{a^2(16-a^2)}{16}$$

אורך צלע הריבוע $2\sqrt{\frac{a^2(16-a^2)}{16}}$ **ושטחו בהתאם** $\frac{a^2(16-a^2)}{4}$

נציב ביחס הנתון: $\frac{4p}{9}=\frac{p\,(16-a^2)}{\frac{a^2(16-a^2)}{4}}$ **ונקבל ש:** $a^2=9$

תשובה: $a^2=9$

א. נמצא את משוואת מישור הפירמידה, שהצגתו הפרמטרית היא $p: \quad \underline{x} = (2,-1,4) + t(4,-3,5) + s(2,-1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} (a,b,c)\,(4,-3,5)=0 \quad \rightarrow 4a-3b+5c=0 \\ (a,b,c)\,(2,-1,1)=0 \quad \rightarrow 2a-b+c=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a-3b+5c=0 \\ -4a+2b-2c=0 \end{array}\right\} -b+3c=0 \quad \rightarrow b=3c$$

נסמן $c=1$ **ומכאן ש:** $b=3$ **ולכן:** $2a-3+1=0 \quad \rightarrow a=1$ **ומשוואת המישור:** $x+3y+z+d=0$

נציב את שיעורי הקדקוד $\mathrm{B}(4,-2,5)$ $\qquad 4-6+5+d=0 \rightarrow d=-3$

ומשוואת מישור הבסיס ABCD **היא** $p: x+3y+z-3=0$

נמצא את ערך הפרמטר בקדקוד $\mathrm{A}(6,a,9)$ **, על ידי הצבתו במשוואת המישור:**

$6+3a+9-3=0 \quad \rightarrow a=-4$ **ושיעורי הקדקוד** $\mathrm{A}(6,-4,9)$

נמצא את שטח בסיס הפירמידה, ששלושה מקדקודיה $\mathrm{A}(6,-4,9)$ **,** $\mathrm{B}(4,-2,5)$ **,** $\mathrm{C}(-2,2,-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \underline{\mathrm{C}} - \underline{\mathrm{A}} = \underline{x} = (-8,6,-10) \ , \ \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underline{\mathrm{B}} - \underline{\mathrm{A}} = \underline{x} = (-2,2,-4)$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{(-8,6,-10)\,(-2,2,-4)}{|(-8,6,-10)|\,|(-2,2,-4)|}$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{|16+12+40|}{\sqrt{64+36+100}\sqrt{4+4+16}} = \frac{68}{\sqrt{200}\sqrt{24}}$$

$$\angle\mathrm{BAC} = 11.039°$$

שטח הבסיס 13.266 **יח"ר** $= S_{\mathrm{ABCD}} = \sqrt{200}\sqrt{24}\sin 11.039°$ **.**

אורך הגובה הוא מרחק הקדקוד $\mathrm{S}(1,1,8)$ **ממישור הבסיס** $p: x+3y+z-3=0$

הוא: 2.7136 **יחידות** $= h = \dfrac{|1+3+8-3|}{\sqrt{1+9+1}}$ **ונפח הפירמידה** $= 12$ $V = \dfrac{13.266 \cdot 2.7136}{3}$

תשובה: נפח הפירמידה 12 **יחידות נפח.**

ב. המישור p **חותך את הצירים בנקודות** K **,** L **,** M

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, על ידי הצבת 0 **בהתאם לציר הנבחר:**

ציר x **:** $(3,0,0)$ **, ציר** y **:** $(0,1,0)$ **, ציר** z **:** $(0,0,3)$ **.**

כיוון שהצירים מאונכים זה לזה, הרי שנפח הפירמידה: 1.5 **יחידות נפח** $= V = \dfrac{(0.5\cdot 3\cdot 1)\cdot 3}{3}$

והיחס בין נפח הפירמידה SABCD **לבין נפח הפירמידה** OKLM **הוא** $12:1.5=8$ **.**

תשובה : 8 **.**

ג. הצגה פרמטרית של גובה הפירמידה SABCD **היא** $h=\underline{x}=(1,1,8)+p(1,3,1)$

ישר זה לא מקביל לאף אחד מהצירים ולכן חותך את שלוש פאות הפירמידה OKLM **,**

המונחות על המישורים: $[x,y],[x,z],[y,z]$**.**

הפאה הרביעית היא המישור p **עצמו אשר גובה הפירמידה** SABCD **מאונך לו ולכן חותך אותו.**

תשובה: הישר שעליו נמצא גובה הפירמידה SABCD **<u>חותך</u> את כל מישורי הפירמידה** OKLM **.**

א. נתונה המשוואה הריבועית $2z^2-(m-2)^2z-\frac{1}{8}i=0$ **.**

כיוון שהמשוואה ריבועית, פתרון יחיד מתקבל כאשר $\Delta=0$

$$(-(m-2)^2)^2-4\cdot2\cdot(-\frac{1}{8}i)=0$$
$$(m-2)^4=-i$$
$$(m-2)_k=cis\frac{270°+360°k}{4}$$
$$m_1=2+cis\,67.5°=2.383+0.924i$$
$$m_2=2+cis\,157.5°=1.076+0.383i$$
$$m_3=2+cis\,247.5°=1.617-0.924i$$
$$m_1=2+cis\,337.5°=2.924-0.383i$$

תשובה: $2.383+0.924i$ **,** $1.076+0.383i$ **,** $1.617-0.924i$ **,** $2.924-0.383i$

ב. תשובה: ברביע הראשון נמצאים הפתרונות: $2.383+0.924i$ **,** $1.076+0.383i$ **(שיעורי** x,y **חיוביים).**

ג. (1) הפתרון היחיד מתקבל בנקודת הקדקוד: $z_K=-\frac{b}{2a}=\frac{(m-2)^2}{4}$

בהתאם לפתרון סעיף א נקבל:

$$z_1=\frac{1}{4}(cis\,67.5°)^2=\frac{1}{4}cis\,135°$$
$$z_2=\frac{1}{4}(cis\,157.5°)^2=\frac{1}{4}cis\,315°$$
$$z_3=\frac{1}{4}(cis\ \ 247.5°)^2=\frac{1}{4}cis\,495°=\frac{1}{4}cis\,135°=z_1$$
$$z_4=\frac{1}{4}(cis\ \ 337.5°)^2=\frac{1}{4}cis\,675°=\frac{1}{4}cis\,315°=z_2$$

קבלנו שני פתרונות $\frac{1}{4}cis\,135°$ **,** $\frac{1}{4}cis\,315°=\frac{1}{4}cis(-45°)$**, היוצאים מנקודה משותפת - ראשית הצירים,**

כאשר הארגומנטים שלהם משלימים לזווית שטוחה ולכן נמצאים על ישר אחד במישור גאוס.

(2) $\tan135°=-1$ **ולכן שיפוע הישר הוא** -1 **וכיוון שיוצא מראשית הצירים משוואתו** $y=-x$

תשובה: $y=-x$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-2x-a}{e^{-x}}$ **, שהמכנה שלה חיובי לכל** x **.**

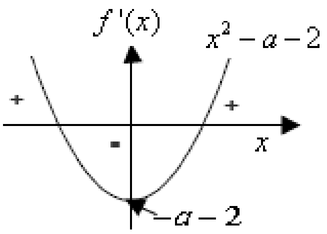
תשובה: כל x **.**

ב. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)e^{-x}+(x^2-2x-a)e^{-x}}{e^{-2x}}$$

$$f'(x)=\frac{e^{-x}(2x-2+x^2-2x-a)}{e^{-2x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-a-2}{e^{-x}}}$$



המכנה חיובי לכל x **ולכן סימן נגזרת נקבע על ידי הטרינום הריבועי** x^2-a-2 **.**

כאשר $-a-2<0 \quad \rightarrow a>-2$ **נקבל פרבולה בעלת מינימום החותכת את ציר ה-** x **פעמיים,**

ובכל אחת מהפעמים תהיה נקודת קיצון של $f(x)$ **(משמאל לימין: מקסימום, מינימום)**

תשובה: $a>-2$

ג. שיעורי ה- x **של נקודות הקיצון הם** $\pm\sqrt{a+2}$ **ולכן המרחק בין הישרים הוא** $2\sqrt{a+2}$

$$2\sqrt{a+2}=6 \quad \rightarrow \sqrt{a+2}=3 \quad \rightarrow a+2=9$$

$$\boxed{a=7} \quad \sqrt{7+2}=3 \quad \rightarrow 3=3\ o.k.$$

תשובה: $a=7$

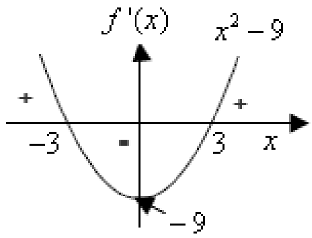
נציב $a=7$ **ונקבל:** $\boxed{f(x)=\frac{x^2-2x-7}{e^{-x}}}$

ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)e^{-x}+(x^2-2x-7)e^{-x}}{e^{-2x}}$$

$$f'(x)=\frac{e^{-x}(2x-2+x^2-2x-7)}{e^{-2x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-9}{e^{-x}}}$$



הנגזרת מתאפסת עבור $x=\pm3$ **, כאשר עבור** $x=-3$ **הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן מקסימום, ועבור** $x=3$ **מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

תשובה: $x=-3$ **מקסימום,** $x=3$ **מינימום.**

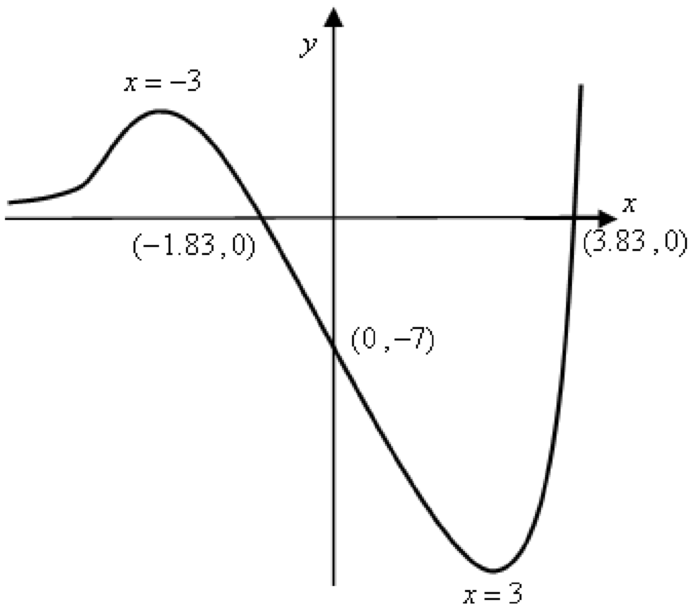
ה. בנקודות החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$

$$x^2-2x-7=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{32}}{2}$$
$$x_1=3.83 \quad \rightarrow \boxed{(3.83\,,0)}$$
$$x_2=-1.83 \quad \rightarrow \boxed{(-1.83\,,0)}$$

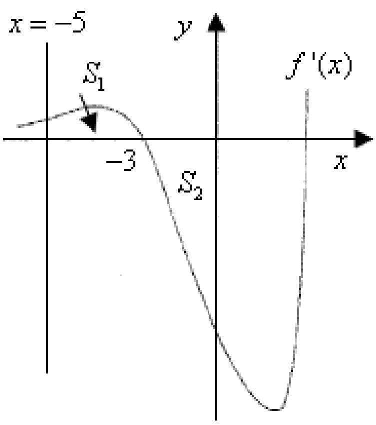
בנקודות החיתוך עם ציר ה- מתקיים $x=0$ ובהתאם: $\boxed{(0\,,-7)} \leftarrow \quad f(0)=\frac{0^2-2\cdot0-7}{e^{-0}}=-7$

תשובה: $(3.83\,,0)$ **,** $(-1.83\,,0)$ **,** $(0\,,-7)$

ו. סקיצה של גרף הפונקציה (נשים לב ש- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ובהתאם $y=0$ אסימפטוטה אופקית)



ז. נחשב את השטח המבוקש – שהוא חיבור של שני שטחים.



$$S_1=\int_{-5}^{-3}(f'(x)-0\,)dx$$
$$S_1=f(x)\Big]_{-5}^{-3}$$
$$S_1=f(-3)-f(-5)$$
$$S_1=0.398-\left(\frac{(-5)^2-2\cdot(-5)-7}{e^5}\right)$$
$$S_1=0.398-0.189$$
$$\boxed{S_1=0.209}$$

$$S_2=\int_{-3}^{0}(0-f'(x)\,)dx$$
$$S_2=-f(x)\Big]_{-3}^{0}$$
$$S_2=-f(0)+f(-3)$$
$$S_2=7+\left(\frac{(-3)^2-2\cdot(-3)-7}{e^3}\right)$$
$$S_2=7+0.398$$
$$\boxed{S_2=7.398}$$

והשטח כולו: 7.607 **יח"ר** $=0.209+7.398$

תשובה: 7.607 **יח"ר.**

נכתב ע"י עפר ילין