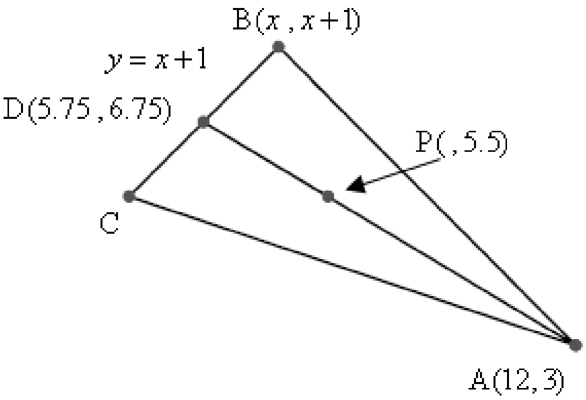
א. משמאל הסרטוט המתאים:



נקודת מפגש התיכונים מחלקת את התיכון ביחס $2:1$ **.**

$5.5=\dfrac{3+2y_{\text{D}}}{3} \quad \rightarrow y_{\text{D}}=6.75$ **ולכן שיעורי הנקודה** D

שעל הצלע $y=x+1$ **הם** $\text{D}(5.75\,,6.75)$ **.**

נסמן את שיעורי קדקוד $\text{B}(x,\,x+1)$ **.**

ע"פ נוסחת אמצע קטע

$$\left.\begin{array}{l} 5.75=\dfrac{x+x_{\text{C}}}{2} \quad \rightarrow x_{\text{C}}=11.5-x \\ 6.75=\dfrac{x+1+y_{\text{C}}}{2} \quad \rightarrow y_{\text{C}}=12.5-x \end{array}\right\} \text{C}(11.5-x,12.5-x)$$

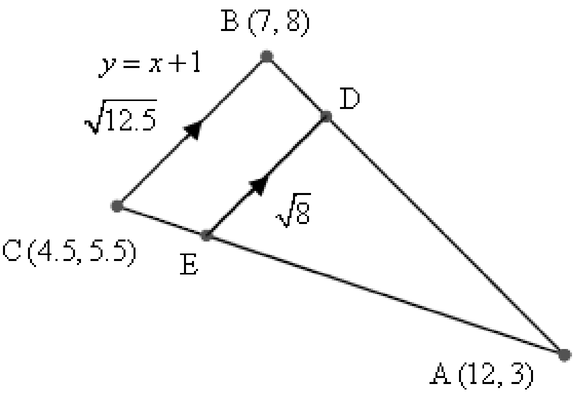
נשתמש בנוסחת שטח משולש, על פי שלושת הקדקודים,

ומכיון שהנקודה A **מתחת לישר** $y=x+1$ $(12+1>3)$ **,**

הרי שניתן לסדר את הקדקודים על פי כיוון השעון.

$$S=0.5\cdot(x_1\cdot(y_3-y_2)+x_2\cdot(y_1-y_3)+x_3\cdot(y_2-y_1))$$
$$12.5=0.5\cdot(12\cdot(x+1-(12.5-x))+(11.5-x)\cdot(3-(x+1))+x\cdot(12.5-x-3))$$
$$25=(12\cdot(2x-11.5)+(11.5-x)\cdot(2-x)+x\cdot(9.5-x)$$
$$25=20x-115$$
$$x=7\rightarrow \boxed{\text{B}(7,8)},\ \boxed{\text{C}(4.5,5.5)}$$

תשובה: $\text{B}(7,8)$ **,** $\text{C}(4.5,5.5)$ **מבלי להגביל את הכלליות (ניתן להחליף בין שמות הקדקודים)**



ב. נשתמש במשפט תאלס, כיוון ש- $\text{BC}\parallel\text{DE}$ **.**

$$\text{BC}=\sqrt{(7-4.5)^2+(8-5.5)^2}=\sqrt{12.5}$$

$$\frac{\text{AE}}{\text{AC}}=\frac{\text{DE}}{\text{BC}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12.5}}=\frac{4}{5}$$

הנקודה E **מחלקת את הצלע** AC **ביחס** $4:1$

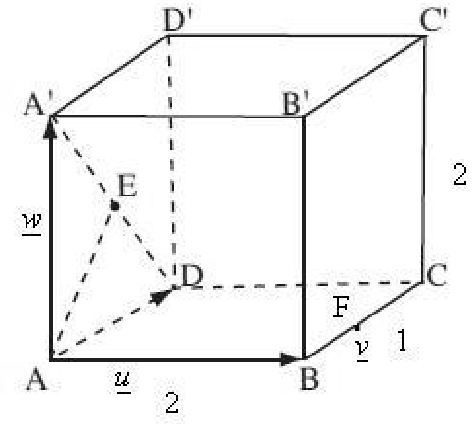
$$\left.\begin{array}{l} x_{\text{E}}=\dfrac{12\cdot1+4.5\cdot4}{5}=6 \\ y_{\text{E}}=\dfrac{3\cdot1+4.5\cdot5.5}{5}=5 \end{array}\right\} \text{E}(6,5)$$

שיפוע הישר BE **שווה לשיפוע הצלע** BC **, שהוא** 1**.**

ובהתאם משוואת הישר BE **היא** $y=x-1$

תשובה: $y=x-1$.

א. מקצועות התיבה מאונכים זה לזה, ואורכיהם נתונים.



$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\quad |\underline{u}|=2 \quad \underline{u}^2=4$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $\quad |\underline{v}|=1 \quad \underline{v}^2=1$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$ $\quad |\underline{w}|=2 \quad \underline{w}^2=4$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$$\cos\angle EAF=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|}$$

$\overrightarrow{BF}=t\overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{BF}=t\underline{v}}$

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\boxed{\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$

$\boxed{\overrightarrow{AF}=\underline{u}+t\underline{v}}$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})(\underline{u}+t\underline{v})$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}t\underline{v}^2=\frac{1}{2}t\cdot 1=0.5t \quad \leftarrow \underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$|\overrightarrow{AE}|=\left|\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\underline{v}^2+\frac{1}{4}\underline{w}^2}=0.5\sqrt{1+4}=0.5\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{AF}|=|\underline{u}+t\underline{v}|=\sqrt{\underline{u}^2+t^2\underline{v}^2}=\sqrt{4+4t^2}$

נבדוק האם זווית $\angle EAF$ **יכולה להיות בת** $30°$

$$\cos 30°=\frac{0.5t}{0.5\sqrt{5}\sqrt{4+4t^2}}$$

$$\sqrt{4+4t^2}=\frac{2t}{\sqrt{15}}$$

$$4+4t^2=\frac{4t^2}{15}$$

$$t^2=-\frac{60}{11}<0$$

ולכן $\angle EAF$ **אינה יכולה להיות בת** $30°$

תשובה: לא קיים ערך של t **עבורו** $\angle EAF=30°$ **.**

ב. (1) נמצא את הערך של t **שעבורו** $\cos\angle \mathrm{EAF} = \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5} = \frac{0.5t}{0.5\sqrt{5}\sqrt{4+t^2}}$$

$$\sqrt{4+t^2} = t\sqrt{5}$$

$$4+t^2 = 5t^2$$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1 \quad \rightarrow \sqrt{4+1^2} = 1\sqrt{5} \quad \rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{5} \quad o.k.$$

$$t = -1 \quad \rightarrow \sqrt{4+(-1)^2} = -1\sqrt{5} \quad \rightarrow \sqrt{5} = -\sqrt{5} \quad not\ o.k$$

תשובה: $t = 1$

(2) עבור $t = 1$ **נקבל** $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = 1\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

תשובה: הנקודה F **מתלכדת עם הקדקוד** C **, בקצה הקטע** BC **.**

ג. אם EF **מקביל למישור הפאה** ABB'A' **, אזי** $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = a\underline{u} + b\underline{w}$

כי כל וקטור במישור, או וקטור מקביל למישור, ניתן להצגה כקומבינציה ליניארית של שני וקטורים במישור, שאינם תלויים זה בזה.

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -\frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w} + \underline{u} + t\underline{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \underline{u} + (t-\frac{1}{2})\underline{v} + -\frac{1}{2}\underline{w}}$$

ולכן $t - \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow t = \frac{1}{2}$

תשובה: הנקודה F **מחלקת את הקטע** BC **ביחס של** 1:1 **.**

ב. אם ΔAED **הוא בסיס הפירמידה** AEDF **, הרי שאורך הגובה הוא מרחק הנקודה** F **מהבסיס.**

כאשר מרחק זה הוא המרחק בין הישר BC **לבסיס, כלומר** $|u| = 2$ **ואינו תלוי במיקום** F **על הישר.**

שטח בסיס הפירמידה, כלומר ΔAED **, הוא רבע משטח הפאה** ADD'A' **,**

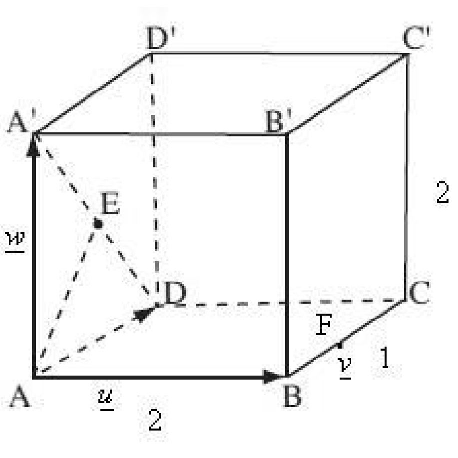
שכן האלכסון DA' **חוצה את הפאה המלבנית לשני משולשים שווי שטח,**

והתיכון AE **חוצה את** ΔA'AD **לשני משולשים שווי שטח.**

שטח ΔAED **הוא** 0.5 **יח"ר**$= 0.5 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 1$ **.**

נפח הפירמידה הוא $\frac{1}{3}$ **יח"ק** $= \frac{0.5 \cdot 2}{3}$

תשובה: נפח הפירמידה AEDF **הוא** $\frac{1}{3}$ **יח"ק.**



א. משוואת המישור הנתון היא $p: ax+by+cz+d=0$

הישר $\mathbf{l}_1: \ \underline{x}=(4,2,-5)+t(1,1,-1)$ **מוכל במישור, לכן מאונך לנורמל של המישור** $h=(a,b,c)$

$$(a,b,c)\,(1,1,-1)=0 \quad \to a+b-c=0 \quad \to a+b=c$$

תשובה: הוכַח.

ב. נתון כי המישור p **יוצר זווית של** $30°$ **עם הישר** $\mathbf{l}_2: \ \underline{x}=(1,-2,3)+s(0,1,1)$

$$\sin 30° = \frac{|(a,b,c)(0,1,1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{2}\,|(b+c)|$$

$$\sqrt{a^2+b^2+(a+b)^2}=\sqrt{2}\,|(b+a+b)|$$

$$\sqrt{a^2+b^2+a^2+2ab+b^2}=\sqrt{2}\,|(a+2b)|$$

$$\sqrt{2a^2+2b^2+2ab}=\sqrt{2}\,|(a+2b)| \quad (\ )^2$$

$$2a^2+2b^2+2ab=2a^2+8ab+8b^2$$

$$8b^2+6ab=0$$

$$8b(b+a)=0$$

$$b=0 \quad \to \sqrt{2a^2}=|a\sqrt{2}| \quad o.k.$$

$$b=-a \quad \to \sqrt{2a^2+2(-a)^2+2a(-a)}=\sqrt{2}\,(a-2a) \quad \to \sqrt{2a^2}=|-a\sqrt{2}| \quad o.k.$$

עבור $b=0$**, נקבל** $a=c$ **ואם נסמן** $a=1$ **נקבל את** $p: x+z+d=0$

נציב את שיעורי הנקודה $(4,2,-5)$ **הנמצאת במישור ונקבל:** $d=1 \quad 4+(-5)+d=0$

ומשוואת המישור היא $p: x+z+1=0$

עבור $b=-a$**, נקבל** $c=0$ **ואם נסמן** $a=1$ **נקבל את** $p: x-y+d=0$

נציב את שיעורי הנקודה $(4,2,-5)$ **הנמצאת במישור ונקבל:** $d=-2 \leftarrow \quad 4-2+d=0$

ומשוואת המישור היא $p: x-y-2=0$

תשובה: $p: x+z+1=0$, **או** $p: x-y-2=0$ **.**

ג. המישור $p: x+z+1=0$ **חותך את ציר ה-** x **בנקודה** $(-1,0,0)$**, והמישור** $p: x-y-2=0$ **בנקודה** $(2,0,0)$ **.**

המישור $[xy]$ $(z=0)$ **מאונך לציר ה-** z**, והמישור** $p: x-y-2=0$ **מקביל לציר ה-** z**, והנקודה** $(2,0,0)$ **גם עליו.**

$x-y-2=0 \quad \rightarrow x=2+y$ **ולכן גם הנקודה** $(4,2,0)$ **על ישר החיתוך.**

ווקטור הכיוון הוא $\underline{x}=\underline{(3,1,0)}-\underline{(2,0,0)}=\underline{(1,1,0)}$ **ובהתאם וקטור הכיוון הוא** $\underline{x}=(1,1,0)$**,**

כאשר ההצגה הפרמטרית היא $\underline{x}=(2,0,0)+t(1,1,0)$ **.**

כיוון שהנקודה $(2,0,0)$ **על שני המישורים, הרי שההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך היא** $\underline{x}=(2,0,0)+t(1,1,0)$

תשובה: ההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך היא $\underline{x}=(2,0,0)+t(1,1,0)$

א. נתונה הסדרה $i, \quad i^2, \quad i^3, ..., \quad i^n, ...$ **, שהיא סדרה הנדסית ומנתה** i **,**

כי $\frac{i^{n+1}}{i^n} = i$ **קבוע שאינו תלוי ב-** n **.**

למספר המרוכב i **קיימת מחזוריות:** $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ **והמחזור מתחיל מחדש.**

הנקודות המתאימות במישור גאוס הן: $(1,0) \quad (0,-1), \quad (-1,0), \quad (0,1)$ **.**

שהן קדקודים של מעוין (אורכי כל הצלעות $\sqrt{2}$ **) שאלכסוניו שווים זה לזה** (2) **,**

ולכן זה ריבוע, שחסום ע"י מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$ **, כי הוא עובר בכל אחד מהקדקודים.**

ב. (1) $S_{4n} = \frac{i(i^{4n}-1)}{i-1} = \frac{i((i^4)^n - 1)}{i-1} = \frac{i(1^n-1)}{i-1} = \frac{i(1-1)}{i-1} = 0$

תשובה: סכום $4n$ **איברים ראשונים של הסדרה הוא מספר ממשי** (0)

(2) $S_{19} = S_{20} - a_{20} = 0 - 1 = -1$ **, כי** $S_{20} = 0$ **, על פי סעיף ב(1) ו-** $a_{20} = 1$ **על פי המחזוריות של המספר המרוכב** i **.**

תשובה: $S_{19} = -1$

ג. (1) נתונה הסדרה $z_1, \quad z_2, \quad z_3, ..., \quad z_n$ **, שאיבריה מיוצגים ע"י** n **קדקודים של מצולע משוכלל בעל** n **צלעות**

החסום במעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$ **, כאשר** $z_1 = 1$ **והקדקודים מסודרים נגד כיוון השעון.**

הארגומנט של $z_1 = 1$ **הוא** 0 **. מכיוון שכל זוויות המצולע שוות זו לזו,**

הרי שהארגומנטים של המספרים המרוכבים, קדקודי המצולע, גדלים ב- $\frac{360°}{n}$ **או** $\frac{2p}{n}$ **ברדיאנים.**

ולכן הם מהווים סדרה הנדסית שמנתה $cis(\frac{2p}{n})$ **.**

$$z_n = 1 \cdot (cis(\frac{2p}{n}))^{n-1} = cis(\frac{2p(n-1)}{n})$$

תשובה: $z_n = cis(\frac{2p(n-1)}{n})$

(2) המשוואה המתאימה היא $z^n = 1$ **, או** $z^n = cis(0)$ **כפי שגם ראינו בסעיף א וגם בסעיף ג(1).**

$$z_k = cis(\frac{0° + 360°k}{n})$$

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{cis(\frac{360°(k+1)}{n})}{cis(\frac{360°k}{n})} = cis(\frac{360°(k+1)}{n} - \frac{360°k}{n}) = cis\,\frac{360°}{n} = cis\,\frac{2p}{n}$$

תשובה: הראינו שפתרונות המשוואה מהווים את הסדרה שהוגדרה בסעיף ג,

ובהתאם מיצגים את הקדקודים של המצולע המשוכלל.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{3}x$

כיוון ש- $1+e^{-x}$ **חיובי לכל** x **, הרי שהפונקציה מוגדרת לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה: כל x **.**

ב. נמצא את נגזרת הפונקציה ואת השיפוע עבור $x=0$ **.**

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{1}{3}=\frac{-3e^{-x}+1+e^{-x}}{3(1+e^{-x})}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}}$$

$$f'(0)=\frac{1-2e^{-0}}{3(1+e^{-0})}=\frac{1-2}{3(1+1)}=-\frac{1}{6}$$

נמצא את שיפוע המיתר בין הנקודות M **ו-** N **ששיעורי ה-** x **שלהם נגדיים.**

$$\mathrm{M}(x_0,\ \ln(1+e^{-x_0})+\frac{1}{3}x_0)$$

$$\mathrm{N}(-x_0,\ \ln(1+e^{x_0})-\frac{1}{3}x_0)$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ln(1+e^{-x_0})+\frac{1}{3}x_0-(\ln(1+e^{x_0})-\frac{1}{3}x_0)}{x_0-(-x_0)}$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ln(1+e^{-x_0})-\ln(1+e^{x_0})+\frac{1}{3}x_0+\frac{1}{3}x_0}{x_0+x_0}$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ln(\frac{1+e^{-x_0}}{1+e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{\ln(\frac{1+\frac{1}{e^{x_0}}}{1+e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{\ln(\frac{\frac{e^{x_0}+1}{e^{x_0}}}{1+e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{\ln(\frac{1}{e^{x_0}})+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}$$

$$m_{\mathrm{MN}}=\frac{\ln e^{-x_0}+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{-x_0\ln e+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{-x_0+\frac{2}{3}x_0}{2x_0}=\frac{-\frac{1}{3}x_0}{2x_0}=-\frac{1}{6}$$

תשובה: $f'(0)=m_{\mathrm{MN}}\ (=-\frac{1}{6})$ **.**

ג. הפונקציה $f'(x)=\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}$ **מוגדרת עבור כל** x **ולכן אין אסימפטוטה אנכית .**

אסימפטוטות אופקיות, כאשר $x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}=\frac{1}{3(1+0)}=\frac{1}{3}\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{e^{-x}}-2}{3(\frac{1}{e^{-x}}+1)}=\frac{0-2}{3(0+1)}=-\frac{2}{3}$$

ניתן למצוא אסימפטוטות אופקיות גם בעזרת טבלת ערכי הנגזרת

x	10	15	20	−10	−20	−30
y	0.333287	0.33333333331	0.33333333333	−0.66662	−0.666666664	−0.6666666666

תשובה: $y=\frac{1}{3}$, $\quad y=-\frac{2}{3}$

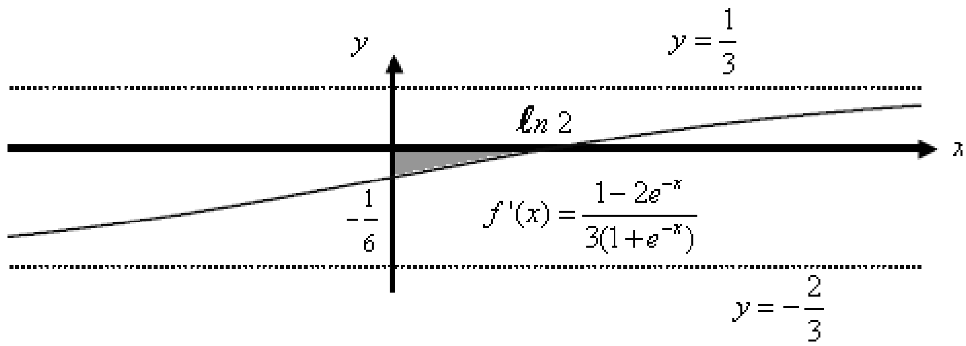
ג (1) נמצא מתי $f'(x)=\frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}$ **שלילית, כאשר נשים לב שמכנה הנגזרת חיובי וסימן המנה ייקבע ע"י המונה.**

$$1-2e^{-x}<0 \quad \to e^{-x}>0.5 \quad \to -x>\ln 0.5 \quad \to x<-\ln 0.5 \quad x<\ln 0.5^{-1} \quad \to x<\ln 2$$

תשובה: $x<\ln 2$

(2) מצאנו כי $f'(0)=-\frac{1}{6}$ **וכי הנגזרת שלילית עבור** $x<\ln 2$ **ובהתאם ניתן לצייר סקיצה של גרף הנגזרת.**

וגם את האסימפטוטות האופקיות של הנגזרת, ובהתאם ניתן לצייר סקיצה של גרף הנגזרת.



$$S=\int_0^{\ln 2}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_0^{\ln 2}=$$

$$S=(-\ln(1+e^{-\ln 2})-\frac{1}{3}\ln 2)-(-\ln(1+e^{-0})-\frac{1}{3}\cdot 0)=$$

$$S=-\ln 1.5-\frac{1}{3}\ln 2+\ln 2=\frac{2}{3}\ln 2-\ln 1.5=\ln\sqrt[3]{4}-\ln 1.5$$

$$\boxed{S=\ln\frac{\sqrt[3]{4}}{1.5}=0.0566}$$

תשובה: גודל השטח $\ln\frac{\sqrt[3]{4}}{1.5}=0.0566$ **יח"ר.**