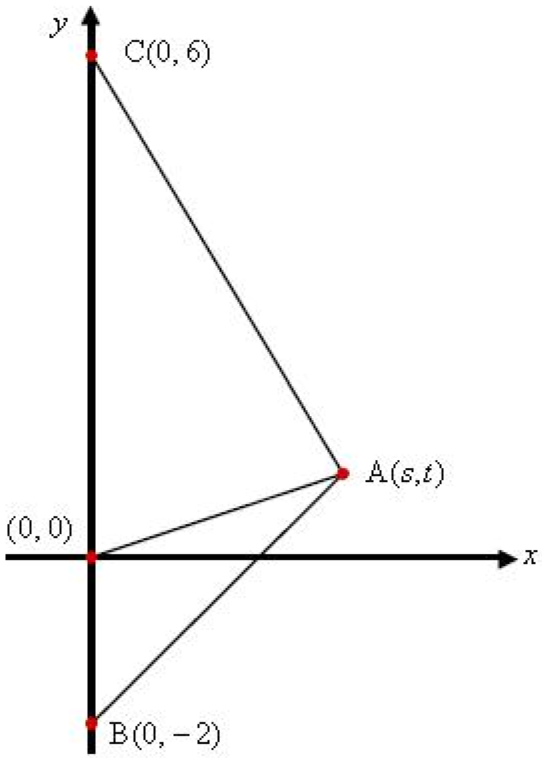
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $A(s,t)$ - נקודה על המקום הגיאומטרי.

חוצה הזווית מחלק את הצלע BC ביחס של $\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$

לכן ע"פ משפט חוצה זווית $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{1}$

באמצעות נוסחת מרחק בין שתי נקודות נקבל

$$\frac{\sqrt{(s-0)^2+(t-6)^2}}{\sqrt{(s-0)^2+(t+2)^2}}=\frac{3}{1}$$

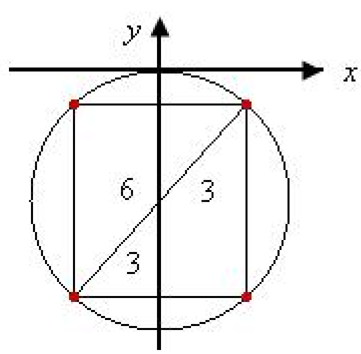
שני הביטויים בתוך השורשים חיוביים, כולל אגף ימין,

$$(s-0)^2+(t-6)^2=9((s-0)^2+(t+2)^2)$$
$$s^2+t^2-12t+36=9s^2+9t^2+36t+36$$
$$0=8s^2+8t^2+48t \quad /:8$$
$$0=s^2+t^2+6t$$
$$9=s^2+(t+3)^2$$
$$\boxed{x^2+(y+3)^2=9}$$

וזה המעגל שמרכזו $(0,-3)$ ורדיוסו 3

קדקוד A אינו נמצא על ציר ה- y , ולכן $x\neq 0$

תשובה: $x^2+(y+3)^2=9$, $x\neq 0$

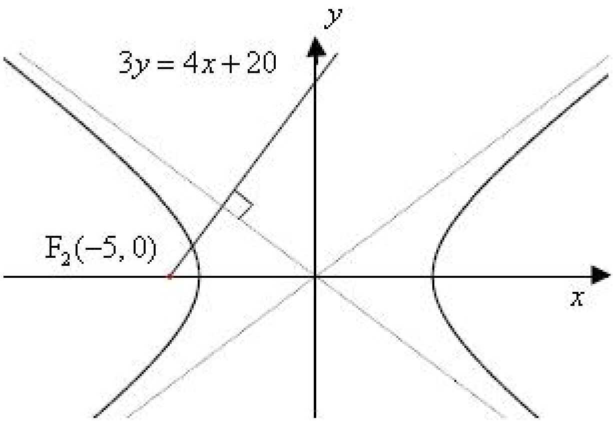


ב. אלכסון המלבן נשען על זווית ישרה ולכן הוא קוטר.

כיוון שקוטרו של המעגל הוא 6, הרי שסכום שתי צלעות סמוכות במלבן גדול מ- 6 (סכום שתי צלעות סמוכות גדול מהצלע השלישית) ובהתאם ההיקף גדול 12 יחי'.

תשובה: *לא ייתכן*

א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



הישר $3y=4x+20$ **עובר דרך המוקד השמאלי של ההיפרבולה** $F_2(c, 0)$**.**

בהתאם $3\cdot 0=4x+20 \quad \to x=-5$

כלומר $F_2(-5, 0)$ **, כאשר** $c=5$ **.**

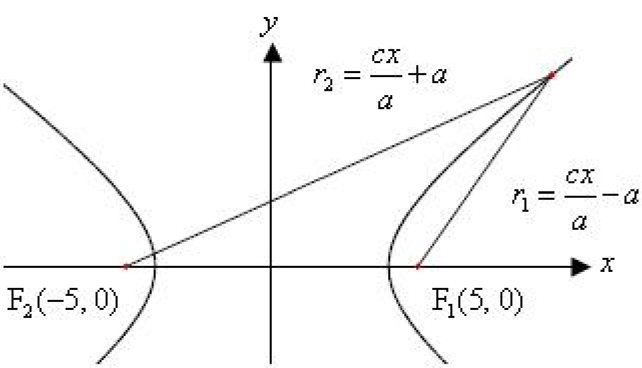
שיפוע הישר הוא $m=\frac{4}{3}$ **ובהתאם שיפוע האסימפטוטה המאונכת הוא** $-\frac{3}{4}$ **ולכן** $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ **.**

בהיפרבולה $a^2+b^2=c^2$

ובהתאם: $a^2+(\frac{3}{4}a)^2=5^2 \quad \to a^2=16, b^2=9$ **.**

תשובה: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

ב. נתון כי $r_2=2r_1$ **(או** $r_1=2r_2$ **)**



כאשר $r_1=\frac{cx}{a}-a$ **,** $r_2=\frac{cx}{a}+a$

ועל-פי סעיף א: $a=4, \quad c=5$

עבור $r_2=2r_1$

$$\frac{5x}{4}+4=2(\frac{5x}{4}-4)$$
$$5x+16=10x-32$$
$$x=9.6 \quad \to \frac{9.6^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \quad \to y=\pm 6.545$$

עבור $r_1=2r_2$

$$2(\frac{5x}{4}+4)=\frac{5x}{4}-4$$
$$10x+32=5x-16$$
$$x=-9.6 \quad \to \frac{(-9.6)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \quad \to y=\pm 6.545$$

תשובה:

$$(9.6, 6.545), (9.6, -6.545),$$
$$(-9.6, 6.545), (-9.6, -6.545)$$

א. ההצגה הפרמטרית של מישור ® היא $\underline{x} = (6,-2,-5) + t(2,-2,-1) + k(-6,2,-1)$

נמצא את הווקטור המאונך למישור $\underline{x} = (a,b,c)$ **, ובהתאם לשני הווקטורים הפורשים את המישור**

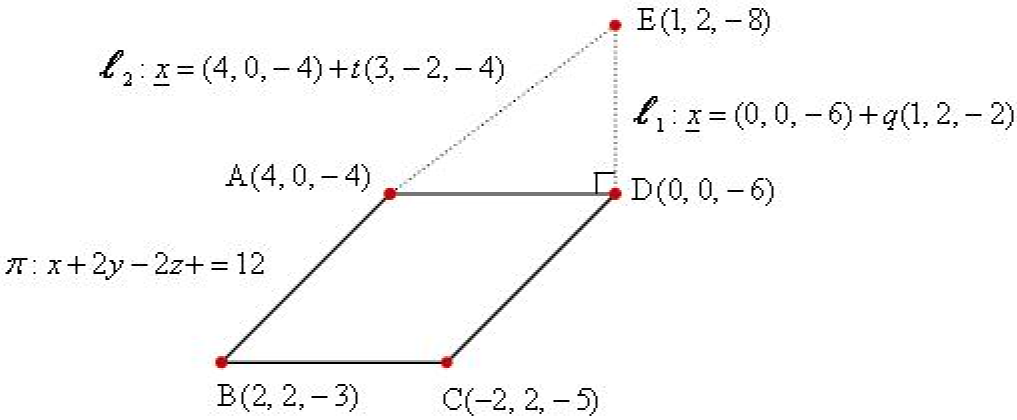
$$(a,b,c)(2,-2,-1) = 0 \quad \rightarrow \quad (1) \quad 2a - 2b - c = 0$$
$$(a,b,c)(-6,2,-1) = 0 \quad \rightarrow (2) \quad -6a + 2b - c = 0$$
$$(1)+(2) \quad \rightarrow -4a - 2c = 0 \quad \rightarrow c = -2a$$
$$(1) \quad \rightarrow 2a - 2b + 2a = 0 \quad \rightarrow 4a = 2b \quad \rightarrow b = 2a$$
$$\rightarrow a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2 \quad \rightarrow ® : x + 2y - 2z + d = 0$$

נציב את שיעורי הנקודה $B(2,2,-3)$ **:** $2 + 2\cdot 2 - 2\cdot(-3) + d = 0 \quad \rightarrow d = -12$

ומשוואת המישור היא $® : x + 2y - 2z = 12$

נציב את שיעורי הנקודה $A(4,0,z)$ **:** $4 + 2\cdot 0 - 2\cdot z = 12 \quad \rightarrow z = -4$

ובהתאם: $A(4,0,-4)$



$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$
$$\underline{D} - \underline{C} = \underline{A} - \underline{B}$$
$$\underline{D} = \underline{A} - \underline{B} + \underline{C} = \underline{x} = (0,0,-6)$$

תשובה: $D(0,0,-6)$

ב. כיוון ש DE **מאונך למישור, הרי שמשולש** ADE **הוא ישר זווית (** $\angle ADE = 90°$ **).**

נקודה טיפוסית על $\ell_1 : \underline{x} = (0,0,-6) + q(1,2,-2)$ $DE:$ **היא** $(q, 2q, -6-2q)$ **.**

נקודה טיפוסית על $\ell_2 : \underline{x} = (4,0,-4) + t(3,-2,-4)$ $AE:$ **היא** $(4+3t, -2t, -4-4t)$ **.**

$$(1) \quad q = 4 + 3t \qquad\qquad q = 1$$
$$(2) \quad 2q = -2t \quad \rightarrow 2(4+3t) = -2t \quad \rightarrow t = -1 \quad \uparrow$$
$$(3) \quad -6 - 2q = -4 + 4t \quad \rightarrow -6 - 2\cdot 1 = -4 + 4\cdot(-1) \quad \rightarrow -8 = -8 \quad o.k.$$

ובהתאם שיעורי נקודה $E(1,2,-8)$

$$\overrightarrow{AD} = \underline{D} - \underline{A} = x = (-4,0,-2)$$
$$\overrightarrow{ED} = \underline{D} - \underline{E} = x = (-1,-2,2)$$

$$S = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{ED}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-2)^2}\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}\sqrt{9}}{2} = 6.708$$

תשובה: שטח משולש AED **הוא** 6.708 **יח"ר.**

נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **:** $f'(x)=\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+t}}$

לאחר שנמצא את ערכו של הפרמטר t **,**

נוודא שפונקציית הנגזרת מוגדרת עבור $x=3$ **(נקודת ההשקה) ועבור** $x=0$ **(בו תהייה נקודת קיצון).**

שיפוע הישר $\sqrt{5}x+18y=0$ **הוא** $-\frac{\sqrt{5}}{18}$ **ובהתאם שיפוע המשיק המאונך** $\frac{18}{\sqrt{5}}$**.**

נתון כי $f'(3)=\frac{18}{\sqrt{5}}$ **ובהתאם :** $\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+t}}$

$$\cancel{3}\cdot\sqrt[4]{3^2+t}=\sqrt{5}\cdot\cancel{3}\quad ()^4$$
$$9+t=25$$
$$t=16$$

ולכן: $f'(x)=\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+16}}$ **ופונקציית הנגזרת מוגדרת לכל** x

ניעזר באינטגרל על-ידי הצבה, כהקדמה לחישוב האינטגרל:

נסמן: $u(x)=x^2+16$

לכן: $\frac{du}{dx}=2x$

ובהתאם: $du=2xdx$

ולכן: $3du=6xdx$

$$\int\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+16}}\,dx=$$
$$=\int 6x(x^2+16)^{-\frac{1}{4}}\,dx=$$
$$=\int 3u^{-\frac{1}{4}}\,du=$$
$$=\frac{3u^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+c$$
$$=4\cdot\sqrt[4]{(x^2+16)^3}+c$$

הנגזרת מתאפסת עבור $x=0$ **כאשר** $(0,10)\ Max\ \rightarrow\quad f'(-1)<0,\quad f'(1)>0$

$$f(x)=\int\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+16}}\,dx=$$
$$f(x)=4\cdot\sqrt[4]{(x^2+16)^3}+c$$
$$10=4\cdot\sqrt[4]{(0^2+16)^3}+c$$
$$10=4\cdot 2^3+c$$
$$c=-22$$

ובהתאם: $f(x)=4\cdot\sqrt[4]{(x^2+16)^3}-22$

תשובה: $f(x)=4\cdot\sqrt[4]{(x^2+16)^3}-22$

נתון $\frac{z-1}{z+1}$ **מספר מדומה, כלומר חלקו הממשי שווה ל-** 0

נסמן : $z=a+bi$ **, כאשר** a,b **ממשיים**

ונראה כי $a^2+b^2=1$ **, כלומר** $|z|=1$ **ואז** z **יהיה על מעגל היחידה.**

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{a+bi-1}{a+bi+1}=\frac{a-1+bi}{a+1+bi}=$$
$$=\frac{a-1+bi}{a+1+bi}\cdot\frac{a+1-bi}{a+1-bi}=\frac{(a-1+bi)\cdot(a+1-bi)}{(a+1+bi)\cdot(a+1-bi)}$$

נפתח את המכנה ע"פ נוסחת כפל מקוצר

$$=\frac{a^2+\cancel{a}-\cancel{abi}-\cancel{a}-1+bi+\cancel{abi}+bi+b^2}{(a+1)^2+b^2}=\frac{a^2+b^2-1+2bi}{(a+1)^2+b^2}$$
$$\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}i$$

כאמור, החלק הממשי שווה ל- 0 **ולכן** $a^2+b^2-1=0$

ובהתאם $a^2+b^2=1$ **, כלומר** $|z|=1$ **ואז** z **על מעגל היחידה.**

הוכח !!!

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{e^x+b}$ **, כאשר** $b>0$ **ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** x **וגם חיובית לכל** x **.**

נמצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים:

הפונקציה מוגדרת לכל x **ולכן אין אסימפטוטה אנכית.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{b}{e^x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+b}=\frac{0}{0+b}=0$$

ובהתאם הישרים $y=1$ **,** $y=0$ **מהווים אסימפטוטות אופקיות**

תשובה: $y=1\ ,\ y=0$

ב. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+b}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+b)-e^xe^x}{(e^x+b)^2}=\frac{e^x(e^x+b-e^x)}{(e^x+b)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{be^x}{(e^x+b)^2}}$$

כיוון שמונה הנגזרת ($b>0$**) ומכנה הנגזרת חיובי לכל** x **הרי שהפונקציה עולה לכל** x

תשובה: ירידה – אף x **, עלייה – כל** x

ג. נמצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים:

המונה לכל x **ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** x

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן** $f(0)=\frac{e^0}{e^0+b}=\frac{1}{1+b}$ **:**

תשובה: $(0,\frac{1}{1+b})$ **.**

ד. נמצא את נקודת הפיתול:

$$f''(x)=b\cdot\frac{e^x(e^x+b)^2-2e^x(e^x+b)}{(e^x+b)^4}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+b-2e^x)}{(e^x+b)^3}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{e^x(b-e^x)}{(e^x+b)^3}}$$

הנגזרת השנייה מתאפסת עבור $b=e^x$ **ולכן** $x=\ell n\, b$

אם נצייר את הפונקציות $y=e^x,\quad y=b$**, נראה כי:**

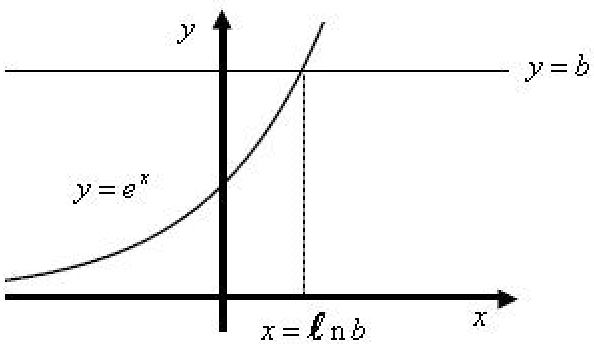
עבור $x>\ell n\, b$ **מתקיים** $\leftarrow\ \cap\ f''(x)<0$

עבור $x<\ell n\, b$ **מתקיים** $\leftarrow\ \cup\ f''(x)>0$

לכן $x=\ell n\, b$ **נקודת פיתול.**

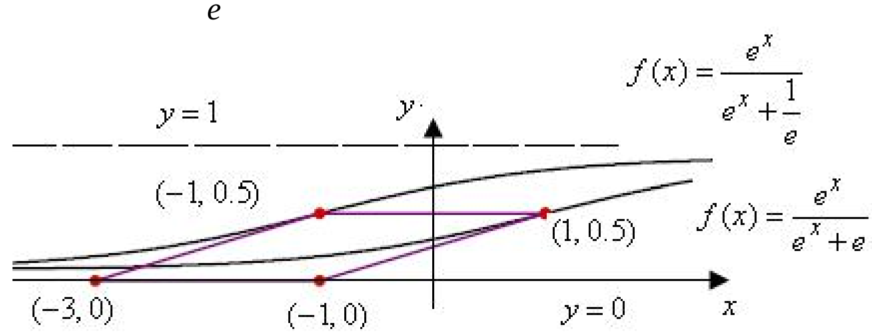
(1) $f(\ell n\, b)=\frac{e^{\ell n b}}{e^{\ell n b}+b}=\frac{b}{b+b}=0.5$ **הוכח !**

(2) $m(\ell n\, b)=\frac{be^{\ell n b}}{(e^{\ell n b}+b)^2}=\frac{b^2}{(2b)^2}=0.25$ **הוכח !**



ה. נסרטט את הגרפים של שתי הפונקציות, כולל המקבילית של סעיף ו :

מכנה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{e^x+e}$ **גדול ממכנה הפונקציה** $f(x)=\frac{e^x}{e^x+\frac{1}{e}}$ **ולכן גרף הראשונה מתחת לשנייה.**



$f(x)=\frac{e^x}{e^x+e}$ **, , נקודת הפיתול** $(1,0.5)$ **,** $m=0.25$

$$y-0.5=0.25\,(x-1)$$
$$y=0.25x+0.25$$
$$y=0\quad\rightarrow x=-1\quad\rightarrow(-1,0)$$

$f(x)=\frac{e^x}{e^x+\frac{1}{e}}$ **, , נקודת הפיתול** $(-1,0.5)$ **,** $m=0.25$

$$y-0.5=0.25\,(x+1)$$
$$y=0.25x+0.75$$
$$y=0\quad\rightarrow x=-3\quad\rightarrow(-3,0)$$

ו. הצורה המתקבלת היא מקבילית (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)

ובהתאם השטח הוא $S=a\cdot h=2\cdot 0.5=1$

תשובה: גודל השטח הוא 1 **יח"ר.**