א. נסמן ב- x **את מהירות הרוכב השני שיצא מ-** A **ולכן מהירות הרוכב הראשון** $x+m$ **.**

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
רוכב ראשון	$x+m$	$\frac{45}{x+m}$	45
רוכב שני	x	$\frac{20}{x}$	20

הרוכב השני נסע שעה אחת פחות, עד אשר הרוכב הראשון הגיע ל- B

המשוואה המתאימה, אם כן, היא $\frac{45}{x+m}=\frac{20}{x}+1$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{45}{x+m}=\frac{20}{x}+1 \quad / \cdot x(x+m)\neq 0$$
$$45x=20(x+m)+x(x+m)$$
$$45x=20x+20m+x^2+mx$$
$$x^2+(m-25)x+20m=0$$
$$x_{1,2}=\frac{25-m\pm\sqrt{(m-25)^2-80m}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{25-m\pm\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$$

על פנת שיהיה פתרון לבעיה, נדרש $\Delta\geq 0$

$$m^2-130m+625\geq 0$$
$$m_{1,2}=\frac{130\pm 120}{2} \quad \rightarrow m=125,\ m=5$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, הרי ש: $m\geq 125$ **או** $m\leq 5$

כיוון שנתון כי $0<m<5$ **, הרי שיש שני פתרונות לבעיה.**

תשובה: $x_1=\frac{25-m+\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$, $x_2=\frac{25-m-\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$

ב. נדרש $x_1 - x_2 < 11$ **(לא צריך ערך מוחלט כי סימנו את** x_1 **כפתרון הגדול מבין השניים.)**

$$x_1 - x_2 - = \frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} - \frac{25 - m - \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}$$

$$\sqrt{m^2 - 130m + 625} < 11$$

ניתן להעלות בריבוע, ללא חשש מפתרונות זרים, כי עבור $0 < m < 5$ **הראינו שהביטוי בתוך השורש חיובי**

$$m^2 - 130m + 625 < 121$$

$$m^2 - 130m + 504 < 0$$

$$m_{1,2} = \frac{130 \pm 122}{2} \quad \to m = 4, \quad m = 126$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, נקבל $4 < m < 126$

ובחיתוך עם התנאי $0 < m < 5$ **נקבל** $4 < m < 5$

תשובה: $4 < m < 5$

א. יש להוכיח כי $1^2-3^2+5^2-7^2+...-(2n-1)^2=-2n^2$

(1) נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$

אגף ימין $-2\cdot 2^2=-8$ **= אגף שמאל** $1^2-3^2=-8$

לכן הטענה נכונה עבור $n=2$

(2) נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^2-3^2+5^2-7^2+...-(2k-1)^2=-2k^2$

(3) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$**, לכן צ"ל**

$$\underbrace{1^2-3^2+5^2-7^2+...-(2k-1)^2}_{-2k^2}+(2k+1)^2-(2k+3)^2=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2k^2 \quad +4k^2+4k+1-(4k^2+12k+9)=-2(k+2)^2$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו, לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow -2k^2+\cancel{4k^2}+4k+1\cancel{-4k^2}-12k-9=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2k^2-8k+8=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2(k^2+4k+4)=-2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2(k+2)^2=-2(k+2)^2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

(4) בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי זוגי כלשהו, אז היא נכונה עבור** $n=k+2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

ג. נתון כי $1^2-3^2+5^2-7^2+...+c^2=1921$ **ובהתאם נסמן:** $c=2n+1$ **כי יש לו מקדם חיובי.**

כלומר: $1^2-3^2+5^2-7^2+...-(2n-1)^2+(2n+1)^2=1921$

על פי סעיף ב : $-2n^2+(2n+1)^2=1921$

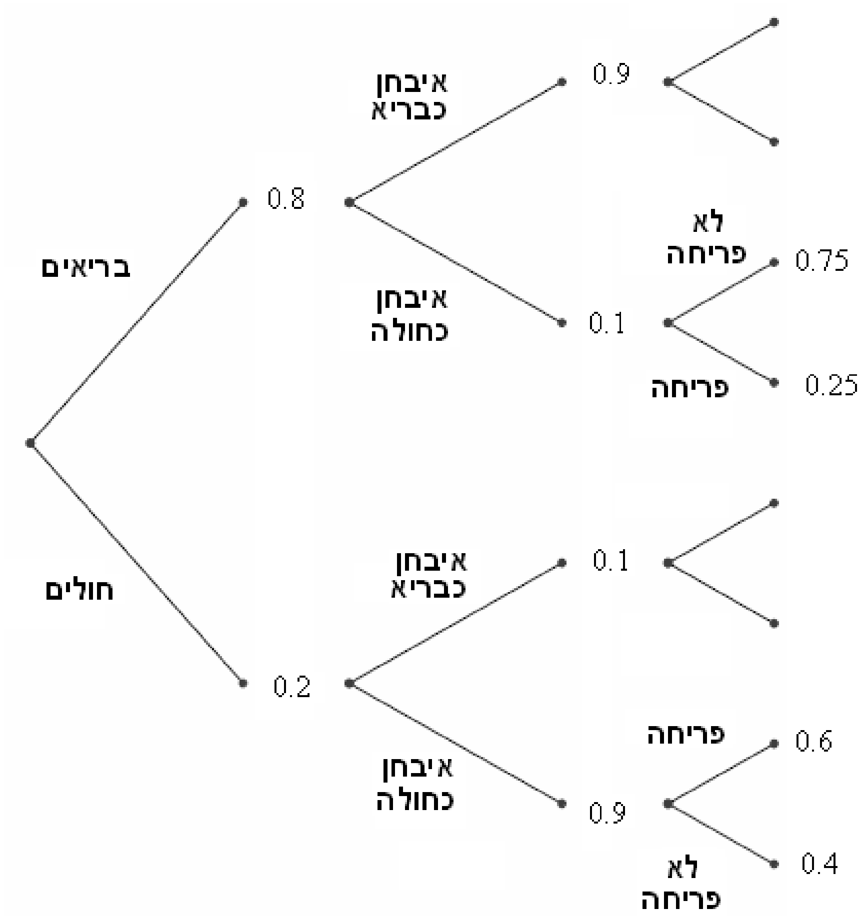
$$2n^2+4n-1920=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-4\pm 124}{4} \quad \rightarrow n=30, \quad n=-32$$

n **כנדרש הוא טבעי זוגי ובהתאם** $c=2\cdot 30+1=61$

תשובה: $c=61$

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים (כולל עבור סעיף ב).



אבחנה שגויה – היא כאשר בריא אובחן כחולה, או כאשר חולה אובחן כבריא

$$P(wrong\ diagnose) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.1$$

תשובה: ב- 10% **מהמקרים ביצע הרופא אבחנה שגויה**

ב. בסעיף זה יש הנחה שרק התרופה היא שעשויה לגרום פריחה, אחרת השאלה לא פתירה !!!!!

יש למצוא ההסתברות שתושב בכפר הוא חולה, אם ידוע שיש לו פריחה.

$$P(\text{תושב חולה} \,/\, \text{יש לו פריחה}) = \frac{P(\text{תושב חולה} \cap \text{יש לו פריחה})}{P(\text{יש לו פריחה})}$$

$$\frac{0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.6}{0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.6} = \frac{0.108}{0.128} = \frac{27}{32}$$

תשובה: ההסתברות שתושב בכפר הוא חולה, אם ידוע שיש לו פריחה היא $\frac{27}{32}$ **.**

<u>נתונים</u>

1. ABC **משולש שווה צלעות**

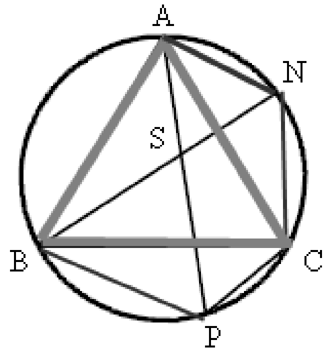
2. $PC \parallel BN$

צ"ל:

א. המשולש BSP **הוא שווה צלעות.**

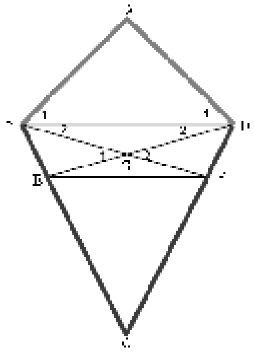
ב. המרובע $SPCN$ **הוא מקבילית.**

ג. $AN = PC$ **.**



<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
1	3	ABC משולש שווה צלעות	נתון
2	4	$\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$	זווית שוות במשולש שווה צלעות
	5	$\angle APB = \angle ACB$	זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת
4, 5	6	$\angle APB = 60^\circ$	כלל המעבר
	7	$\angle APC = \angle ABC$	זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת
4,7	8	$PC \parallel BN$	נתון
8	9	$\angle BSP = \angle APC$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
4, 7, 9	10	$\angle BSP = 60^\circ$	כלל המעבר
6, 10	11	$\angle SBP = 60^\circ$	סכום זוויות ΔBSP 180°
6, 10, 11	12	$\angle BSP = \angle APB = \angle SBP$	כלל המעבר
8, 12	13	המשולש BSP הוא שווה צלעות	ΔBSP מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות
		מ.ש.ל א	
	14	$\angle N = \angle BAC$	זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת
4, 14	15	$\angle N = 60^\circ$	כלל המעבר
10, 15	16	$\angle N = \angle BSP$	כלל המעבר
16	17	$NC \parallel SP$	אם זוויות מתאימות שוות אז ישרים מקבילים
8, 17	18	$SPCN$ מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
		מ.ש.ל. ב	
17	19	$\angle NCA = \angle CAP$	הישרים מקבילים והזוויות המתחלפות שוות
19	20	$AN = PC$	מול זוויות היקפיות שוות מיתרים שווים
		מ.ש.ל. ג	



נתונים

1. $ABCD$ **הוא דלתון** **2.** $AB = AD$ **3.** $BC = DC$

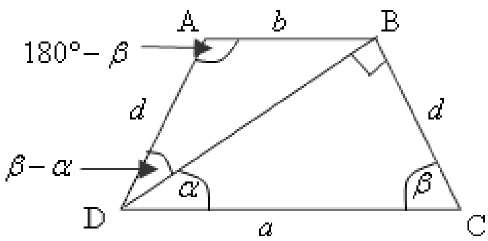
4. $\angle ADE = \angle CDE = \dfrac{\angle ADC}{2}$ **5.** $\angle ABF = \angle CBF = \dfrac{\angle ABC}{2}$

צ"ל:

א. (1) $GB = GD$ **(2)** $\Delta BGE \cong \Delta DGF$ **.**

ב. המרובע $DBEF$ **הוא טרפז שווה שוקיים.**

הסבר		טענה	נימוק
1	6	$ABCD$ **דלתון**	**נתון**
6	7	$\angle ABC = \angle ADC$	**זוויות בסיס שוות בדלתון**
5	8	$\angle ABF = \angle CBF = \dfrac{\angle ABC}{2}$	**נתון**
4	9	$\angle ADE = \angle CDE = \dfrac{\angle ADC}{2}$	**נתון**
7, 8, 9	10	$\angle ABF = \angle ADG$	**הצבה וכלל המעבר**
2	11	$AB = AD$	**נתון**
6, 10, 11	12	$\angle B_1 = \angle D_1$	**מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות** ΔABD
10, 12	13	**(ז)** $\angle B_2 = \angle D_2$	**הפרש זוויות**
13	14	**(צ)** $\boxed{GB = GD}$	**מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות** ΔBGD
4, 14	15	**(ז)** $\angle G_1 = \angle G_2$	**זוויות קדקודיות שוות זו לזו**
13, 14, 15	16	$\boxed{\Delta BGE \cong \Delta DGF}$	**משפט חפיפה ז.צ.ז**
מ.ש.ל. א			
3	17	$BC = DC$	**נתון**
16	18	$BE = DF$	**צלעות מתאימות במשולשים חופפים**
17, 18	19	$BC - BE = DC - DF$	**חיסור קטעים שווים מקטעים שווים**
17	19	$CE = CF$	**הפרש קטעים**
18,20	20	$\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{CF}{DF}$	**חישוב**
18,20	21	$EF \parallel BD$	**משפט תאלס הפוך**
	22	$BE \nparallel DF$	**המשכי הקטעים נפגשים ב** C
21,22	23	$DBEF$ **טרפז**	**זוג צלעות נגדיות מקבילות**
18, 23	24	$DBEF$ **טרפז שווה שוקיים**	**טרפז עם שוקיים שוות**
מ.ש.ל. ב			



א. נעלה את השרטוט המעודכן, כולל לסעיף ב, והסברים בהמשך:

ABCD **טרפז שווה שוקיים (נתון)**

$\mathbf{R}\text{BCD} = b$ **(נתון)**

$\mathbf{R}\text{ADC} = b$ **(זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים)**

$\mathbf{R}\text{A} = 180° - b$ **(סכום זוויות חד צדדיות בין מקבילים הוא $180°$)**

$\text{BC} = \text{AD} = d$ **(נתון)**

ניעזר במשפט קוסינוסים בשני משולשים

$\underline{\Delta\text{DBC}}$: $\text{BD}^2 = \text{BC}^2 + \text{CD}^2 - 2\text{BC}\cdot\text{BD}\cdot\cos\angle\text{BCD}$

$$\text{BD}^2 = d^2 + a^2 - 2\cdot d\cdot a\cdot\cos b$$

$$\cos b = \frac{d^2 + a^2 - \text{BD}^2}{2ad}$$

$\underline{\Delta\text{ABD}}$: $\text{BD}^2 = \text{AD}^2 + \text{AB}^2 - 2\text{AD}\cdot\text{AB}\cdot\cos\angle\text{BAD}$

$$\text{BD}^2 = d^2 + b^2 - 2\cdot d\cdot b\cdot\cos(180° - b)$$

$$\cos b = \frac{\text{BD}^2 - d^2 - b^2}{2bd} \quad \leftarrow \cos x = -\cos(180° - x)$$

$$\frac{d^2 + a^2 - \text{BD}^2}{\cancel{2}a\cancel{d}} = \frac{\text{BD}^2 - d^2 - b^2}{\cancel{2}b\cancel{d}}$$

$$bd^2 + a^2 b - b\cdot\text{BD}^2 = a\cdot\text{BD}^2 - ad^2 - ab^2$$

$$bd^2 + a^2 b + ad^2 + ab^2 = a\cdot\text{BD}^2 + b\cdot\text{BD}^2$$

$$(a+b)d^2 + ab(a+b) = (a+b)\text{BD}^2$$

$$(a+b)(d^2 + ab) = (a+b)\text{BD}^2 \quad / : (a+b) \neq 0$$

$$\boxed{\text{BD} = \sqrt{ab + d^2}}$$

ב. נשתמש במשפט הסינוסים

$\underline{\Delta\text{ABD}}$

$$\frac{\text{b}}{\sin(b - a)} = \frac{d}{\sin a} \quad \to (1)\ \frac{\sin a}{\sin(b - a)} = \frac{d}{b}$$

כיוון שנתון $a + b = 90°$ **הרי ש-** ΔBDC **ישר זווית, ניעזר במשפט פיתגורס:**

$$a^2 = (\sqrt{ab + d^2})^2 + d^2$$

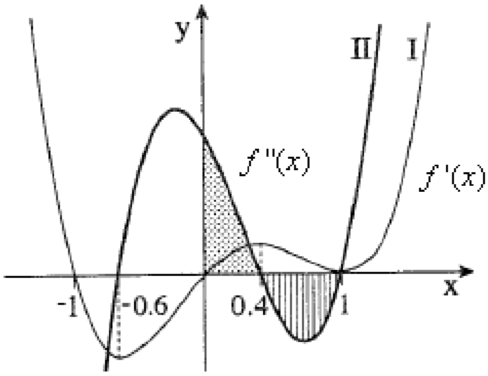
$$a^2 = ab + 2d^2$$

$$a^2 - ab = 2d^2 \quad / : 2b^2 \neq 0$$

$$\frac{a^2 - ab}{2b^2} = \frac{d^2}{b^2} \quad \to (2)\ \frac{d}{b} = \sqrt{\frac{a^2 - ab}{2b^2}}$$

ובאמצעות כלל המעבר $\dfrac{\sin a}{\sin(b - a)} = \sqrt{\dfrac{a^2 - ab}{2b^2}}$

הוכַח !



א. כאשר ל: $f'(x)$ יש נקודת קיצון, הרי שבוודאות $f''(x)=0$

גרף I מתקיים קיצון עבור $x=0.4$ וגרף II מתאפס שם,

גרף I מתקיים קיצון עבור $x=-0.6$ וגרף II מתאפס שם.

תשובה: גרף I - $f'(x)$, גרף II - $f''(x)$

ב. נראה, בסיוע הגרף הנתון של פונקציית הנגזרת הראשונה

טבלת עלייה ירידה של $f(x)$.

בתחום $x>0$ או $x<-1$ $f'(x)$ אי-שלילית ולכן $f(x)$ עולה.

בתחום $-1<x<0$ $f'(x)$ שלילית ולכן $f(x)$ יורדת.

$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$+$ ↗		$-$ ↘		$+$ ↗		$+$ ↗

בהתאם: $x=0$ מינימום , $x=-1$ מקסימום ($x=1$ פיתול)

תשובה: $x=0$ מינימום , $x=-1$ מקסימום

ג. נראה, בסיוע הגרף הנתון של פונקציית הנגזרת השנייה

טבלת קעירות של $f(x)$.

בתחום $x>1$ או $-0.6<x<-0.4$ מתקיים $f''(x)>0$

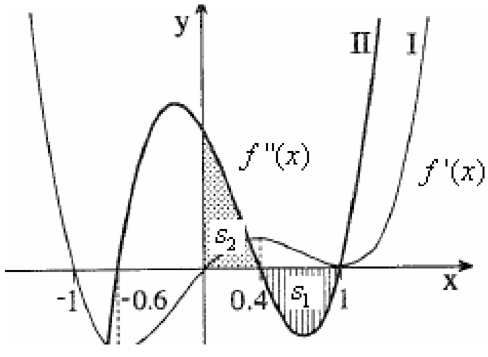
ובהתאם $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$.

בתחום $0.4<x<1$ או $x<-0.6$ מתקיים $f''(x)<0$

ולכן $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$.

$x<-0.6$	-0.6	$-0.6<x<0.4$	0.4	$0.4<x<1$	1	$x>1$
$\cap$ $-$		$\cup$ $+$		$\cap$ $-$		$\cup$ $+$

תשובה: $x=1$, $x=0.4$, $x=-0.6$ נקודת פיתול



ד. נחשב כל שטח בנפרד

$$S_1=\int_{0.4}^{1}(0-f''(x))\,dx=-f'(x)\Big]_{0.4}^{1}=-f'(1)+f'(0.4)=f'(0.4)$$

$$S_2=\int_{0}^{0.4}(f''(x)-0)\,dx=f'(x)\Big]_{0}^{0.4}=f'(0.4)+f'(0)=f'(0.4)$$

כלומר: $S_1=S_2$

תשובה: הוּכַח !

א. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{\sin(2x)}{2}$

$$f'(x)=1-\cos 2x$$
$$f'(x)=1-(1-2\sin^2 x)$$
$$\boxed{f'(x)=2\sin^2 x}$$

הוּכַח !

ב. (1) פונקציית הנגזרת חיובית לכל $\sin x\neq 0$ **, כלומר עבור** $x\neq pk$ **ולכן הפונקציה עולה לכל** x **.**

עבור $x=pk$ **יהיה המשיק מקביל לציר ה-** x **, אך אלו תהיינה נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.**

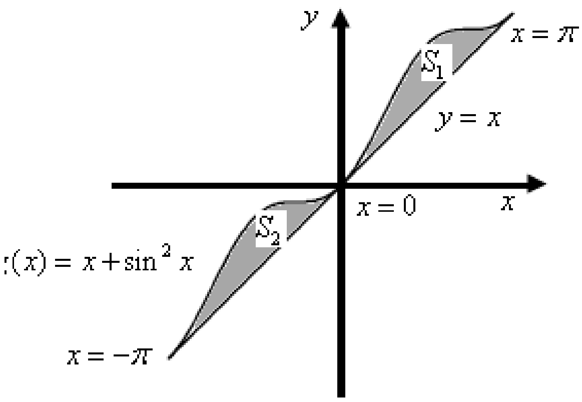
תשובה: לפונקציה $f(x)$ **אין נקודות קיצון.**

(2) כפי שהראינו, עבור $x=pk$ **יש נקודות פיתול, בהן המשיק מקביל לציר ה-** x **, אך תיתכנה נוספות:**

$$f''(x)=4\sin x\cos x$$
$$\boxed{f''(x)=2\sin 2x}$$
$$\sin 2x=0 \quad \rightarrow x=\frac{p}{2}k$$

כלומר, נקודות פיתול תהיינה עבור $x=\frac{p}{2}k$ **(הערה – ניתן להסתפק בהסבר של סעיף ב (1))**

תשובה: לפונקציה $f(x)$ **יש נקודות פיתול**



ג. נמצא את נקודות החיתוך בין $g(x)=x+\sin^2 x$

לישר $y=x$ **, בתחום** $-p\le x\le p$**.**

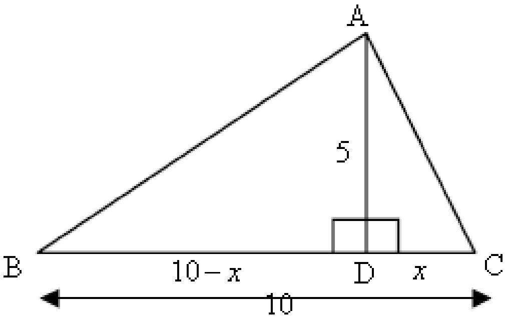
$$x+\sin^2 x=x$$
$$\sin^2 x=0$$
$$\sin x=0$$
$$x=-p,\quad x=0\quad ,x=p$$

$x+\sin^2 x\ge x$ **ולכן גרף הפונקציה** $g(x)$ **מעל לישר** $y=x$

$$S=\int_0^p (x+\sin^2 x-x)\,dx+\int_{-p}^0 (x+\sin^2 x-x)\,dx$$
$$S=\int_0^p (\sin^2 x\,dx+\int_{-p}^0 (\sin^2 x)\,dx$$
$$S=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right)\Big]_0^p+\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right)\Big]_{-p}^0 \quad \leftarrow \quad א$$
$$S=\left(\left(\frac{p}{2}-\frac{\sin(2p)}{4}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{\sin(2\cdot 0)}{4}\right)\right)+\left(\left(\frac{0}{2}-4\right)-\left(\frac{p}{2}-\frac{\sin(2p)}{4}\right)\right)$$
$$S=\frac{p}{2}+\frac{p}{2}$$
$$\boxed{S=p}$$

תשובה: p **יח"ר**

א. הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא *היקף המשולש*.



x **- אורך הקטע** CD **(ס"מ)**

ניעזר במשפט פיתגורס בשני המשולשים ישרי הזווית

$$f(x)=10+\sqrt{5^2+x^2}+\sqrt{5^2+(10-x)^2}$$

$$\boxed{f(x)=10+\sqrt{25+x^2}+\sqrt{125-20x+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25+x^2}}+\frac{2x-20}{2\sqrt{125-20x+x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x\sqrt{125-20x+x^2}+(x-10)\sqrt{25+x^2}}{\sqrt{25+x^2}\sqrt{125-20x+x^2}}}$$

$$0=x\sqrt{125-20x+x^2}+(x-10)\sqrt{25+x^2}$$

$$x\sqrt{125-20x+x^2}=(10-x)\sqrt{25+x^2}\qquad ()^2$$

$$x^2(125-20x+x^2)=(100-20x+x^2)(25+x^2)$$

$$125x^2\cancel{-20x^3}+\cancel{x^4}=2500+100x^2-500x\cancel{-20x^3}+25x^2+\cancel{x^4}$$

$$500x=2500$$

$$\boxed{x=5}\quad 5\sqrt{125-20\cdot5+5^2}=(10-5)\sqrt{25+5^2}\quad\rightarrow 5\sqrt{50}=5\sqrt{50}\ o.k.$$

$$f'(4)=\frac{4\sqrt{125-20\cdot4+4^2}+(4-10)\sqrt{25+4^2}}{+}=-7.17<0$$

$$f'(6)=\frac{6\sqrt{125-20\cdot6+6^2}+(6-10)\sqrt{25+6^2}}{+}=7.17<0$$

הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות עבור $x=5$, כלומר הפונקציה מירידה לעליה וזה מינימום

קבלנו שהמשולש שווה שוקיים, שכן הגובה הוא גם תיכון,

כיוון שהתיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה – הרי שהמשולש הוא גם ישר זווית.

$$\mathrm{AC}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

תשובה: צלעות המשולש 10 ס"מ, $5\sqrt{2}$ ס"מ, $5\sqrt{2}$ ס"מ

ב. המשולש הוא ישר זווית ושווה שוקיים (כנראה תשובה מספקת)

תכונותיו: זוויות בסיס שוות $45°$, חוצה הזווית הראש מתלכד עם הגובה ועם התיכון לבסיס.

מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר.