

א. נסמן ב- x את מהירות הרכב השני שיצא מ- A ולכן מהירות הרכב הראשון $x+m$.

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

דרג-מרחק - s ק"מ	מהירות - v קמ"ש	זמן - t שעות	
45	$\frac{45}{x+m}$	$x+m$	רכב ראשון
20	$\frac{20}{x}$	x	רכב שני

הרכב השני נסע שעה אחת פחות, עד אשר הרכב הראשון הגיע ל- B

$$\frac{45}{x+m} = \frac{20}{x} + 1 \text{ היא כן, אם כן, היא}$$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{45}{x+m} = \frac{20}{x} + 1 \quad / \cdot x(x+m) \neq 0$$

$$45x = 20(x+m) + x(x+m)$$

$$45x = 20x + 20m + x^2 + mx$$

$$x^2 + (m-25)x + 20m = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25-m \pm \sqrt{(m-25)^2 - 80m}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{25-m \pm \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}$$

על פנת שיהיה פתרון לבעיה, נדרש $\Delta \geq 0$

$$m^2 - 130m + 625 \geq 0$$

$$m_{1,2} = \frac{130 \pm 120}{2} \rightarrow m = 125, m = 5$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, הרי ש: $m \leq 5$ או $m \geq 125$

כיוון שנתון כי $0 < m < 5$, הרי שיש שני פתרונות לבעיה.

תשובה: $x_2 = \frac{25-m-\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$, $x_1 = \frac{25-m+\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$

ב. נדרש $x_1 - x_2 < 11$ (לא צריך ערך מוחלט כי סימנו את x_1 כפתרון הגדול מבין השניים).

$$x_1 - x_2 = \frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} - \frac{25 - m - \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}$$
$$\sqrt{m^2 - 130m + 625} < 11$$

ניתן להעלות בריבוע, ללא חשש מפתרונות זרים, כי עבור $0 < m < 5$ הראינו שהביטוי בתוך השורש חיובי

$$m^2 - 130m + 625 < 121$$

$$m^2 - 130m + 504 < 0$$

$$m_{1,2} = \frac{130 \pm 122}{2} \rightarrow m = 4, \quad m = 126$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, נקבל $4 < m < 126$

ובחיתוך עם התנאי $0 < m < 5$ נקבל $4 < m < 5$

תשובה: $4 < m < 5$

א. יש להוכיח כי $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \dots - (2n-1)^2 = -2n^2$

(1) נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 2$

אגף ימין $= -2 \cdot 2^2 = -8$ = אגף שמאל $1^2 - 3^2 = -8$

לכן הטענה נכונה עבור $n = 2$

(2) נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$ טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \dots - (2k-1)^2 = -2k^2$

(3) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 2$, לכן צ"ל

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \dots - (2k-1)^2 + (2k+1)^2 - (2k+3)^2 = -2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \downarrow \\ -2k^2 \end{array} + 4k^2 + 4k + 1 - (4k^2 + 12k + 9) = -2(k+2)^2$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו, לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow -2k^2 + \cancel{4k^2} + 4k + 1 - \cancel{4k^2} - 12k - 9 = -2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2k^2 - 8k + 8 = -2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2(k^2 + 4k + 4) = -2(k+2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2(k+2)^2 = -2(k+2)^2$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

(4) בדקנו את נכונות הטענה עבור $n = 2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n = k$ טבעי זוגי כלשהו, אז היא נכונה עבור $n = k + 2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ג. נתון כי $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \dots + c^2 = 1921$ ובהתאם נסמן: $c = 2n + 1$ כי יש לו מקדם חיובי.

כלומר: $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \dots - (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = 1921$

על פי סעיף ב: $-2n^2 + (2n+1)^2 = 1921$

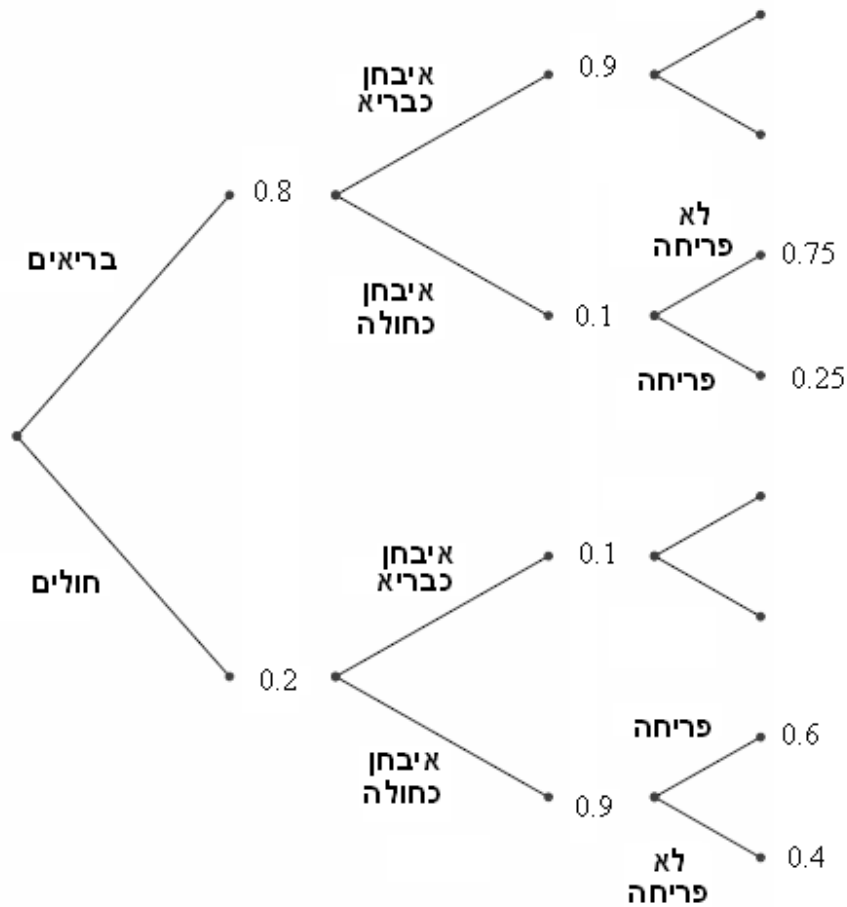
$$2n^2 + 4n - 1920 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-4 \pm 124}{4} \rightarrow n = 30, \quad n = -32$$

n כנדרש הוא טבעי זוגי ובהתאם $c = 2 \cdot 30 + 1 = 61$

תשובה: $c = 61$

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים (כולל עבור סעיף ב).



אבחנה שגויה – היא כאשר בריא אובחן כחולה, או כאשר חולה אובחן כבריא

$$P(\text{wrong diagnose}) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.1$$

תשובה: ב- 10% מהמקרים ביצע הרופא אבחנה שגויה

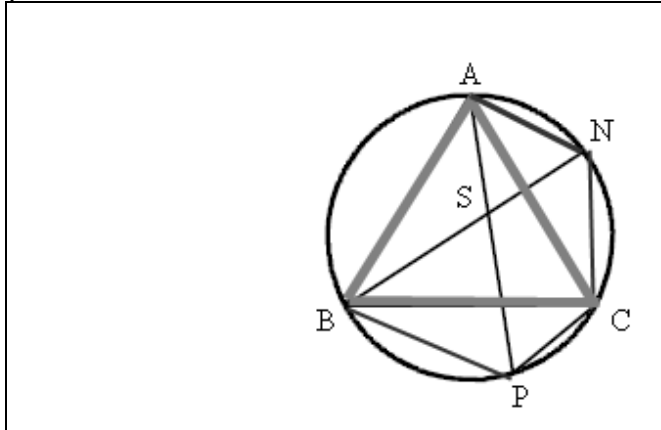
ב. בסעיף זה יש הנחה שרק התרופה היא שעשויה לגרום פריחה, אחרת השאלה לא פתירה!!!!

יש למצוא ההסתברות שתושב בכפר הוא חולה, אם ידוע שיש לו פריחה.

$$P(\text{יש לו פריחה} \cap \text{תושב חולה}) = \frac{P(\text{יש לו פריחה} / \text{תושב חולה})}{P(\text{יש לו פריחה})}$$

$$\frac{0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.6}{0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.6} = \frac{0.108}{0.128} = \frac{27}{32}$$

תשובה: ההסתברות שתושב בכפר הוא חולה, אם ידוע שיש לו פריחה היא $\frac{27}{32}$.

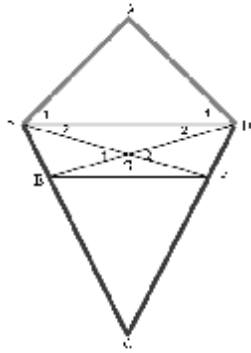


נתונים

1. משולש שווה צלעות ABC
 2. PC PBN
- צ"ל:
- א. המשולש BSP הוא שווה צלעות.
 - ב. המרובע SPCN הוא מקבילית.
 - ג. AN = PC.

הוכחה

נימוק	טענה	הסבר
נתון	משולש שווה צלעות ABC	1, 3
זווית שוות במשולש שווה צלעות	$\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$	2, 4
זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת	$\angle APB = \angle ACB$	5
כלל המעבר	$\angle APB = 60^\circ$	4, 5, 6
זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת	$\angle APC = \angle ABC$	7
נתון	PC PBN	7, 8
זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים	$\angle BSP = \angle APC$	8
כלל המעבר	$\angle BSP = 60^\circ$	4, 7, 9
סכום זוויות $\triangle BSP = 180^\circ$	$\angle SBP = 60^\circ$	6, 10
כלל המעבר	$\angle BSP = \angle APB = \angle SBP$	6, 10, 11
$\triangle BSP$ מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות	המשולש BSP הוא שווה צלעות	8, 12
מ.ש.ל א		
זוויות היקפיות שוות הנשענות על אותה קשת	$\angle N = \angle BAC$	14
כלל המעבר	$\angle N = 60^\circ$	4, 14
כלל המעבר	$\angle N = \angle BSP$	10, 15
אם זוויות מתאימות שוות אז ישרים מקבילים	NC PSP	16
שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות	SPCN מקבילית	8, 17
מ.ש.ל ב		
הישרים מקבילים והזוויות המתחלפות שוות	$\angle NCA = \angle CAP$	17, 19
מול זוויות היקפיות שוות מיתרים שווים	AN = PC	19
מ.ש.ל ג		



נתונים

1. ABCD הוא דלתון 2. $AB = AD$ 3. $BC = DC$
 4. $\angle ADE = \angle CDE = \frac{\angle ADC}{2}$ 5. $\angle ABF = \angle CBF = \frac{\angle ABC}{2}$

צ"ל:

- א. $GB = GD$ (1) $\Delta BGE \cong \Delta DGF$ (2)
 ב. המרובע DBEF הוא טרפז שווה שוקיים.

נימוק	טענה	הסבר
נתון	ABCD דלתון	1, 6
זוויות בסיס שוות בדלתון	$\angle ABC = \angle ADC$	6, 7
נתון	$\angle ABF = \angle CBF = \frac{\angle ABC}{2}$	5, 8
נתון	$\angle ADE = \angle CDE = \frac{\angle ADC}{2}$	4, 9
הצבה וכלל המעבר	$\angle ABF = \angle ADG$	7, 8, 9, 10
נתון	$AB = AD$	2, 11
מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔABD	$\angle B_1 = \angle D_1$	6, 10, 11, 12
הפרש זוויות	$\angle B_2 = \angle D_2$ (ז)	10, 12, 13
מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔBGD	$GB = GD$ (י)	13, 14
זוויות קדקודיות שוות זו לזו	$\angle G_1 = \angle G_2$ (ז)	4, 14, 15
משפט חפיפה ז.צ.ז	$\Delta BGE \cong \Delta DGF$	13, 14, 15, 16
מ.ש.ל. א		
נתון	$BC = DC$	3, 17
צלעות מתאימות במשולשים חופפים	$BE = DF$	16, 18
חיסור קטעים שווים מקטעים שווים	$BC - BE = DC - DF$	17, 18, 19
הפרש קטעים	$CE = CF$	17, 19
חישוב	$\frac{CE}{BE} = \frac{CF}{DF}$	18, 20
משפט תאלס הפוך	EF PBD	18, 20, 21
המשכי הקטעים נפגשים ב C	BE / DF	22
זוג צלעות נגדיות מקבילות	טרפז DBEF	21, 22, 23
טרפז עם שוקיים שוות	טרפז שווה שוקיים DBEF	18, 23, 24
מ.ש.ל. ב		

א. נעלה את השרטוט המעודכן, כולל לסעיף ב, והסברים בהמשך:

ABCD טרפז שווה שוקיים (נתון)

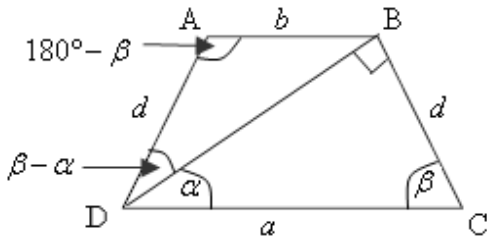
$RBCD = b$ (נתון)

$RADC = b$ (זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים)

$RA = 180^\circ - b$ (סכום זוויות חד צדדיות בין מקבילים הוא 180°)

$BC = AD = d$ (נתון)

ניעזר במשפט קוסינוסים בשני משולשים



$$\triangle DBC: BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD$$

$$BD^2 = d^2 + a^2 - 2 \cdot d \cdot a \cdot \cos b$$

$$\cos b = \frac{d^2 + a^2 - BD^2}{2ad}$$

$$\triangle ABD: BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \angle BAD$$

$$BD^2 = d^2 + b^2 - 2 \cdot d \cdot b \cdot \cos(180^\circ - b)$$

$$\cos b = \frac{BD^2 - d^2 - b^2}{2bd} \quad \leftarrow \cos x = -\cos(180^\circ - x)$$

$$\frac{d^2 + a^2 - BD^2}{\cancel{2ad}} = \frac{BD^2 - d^2 - b^2}{\cancel{2bd}}$$

$$bd^2 + a^2b - b \cdot BD^2 = a \cdot BD^2 - ad^2 - ab^2$$

$$bd^2 + a^2b + ad^2 + ab^2 = a \cdot BD^2 + b \cdot BD^2$$

$$(a+b)d^2 + ab(a+b) = (a+b)BD^2$$

$$(a+b)(d^2 + ab) = (a+b)BD^2 \quad /: (a+b) \neq 0$$

$$\boxed{BD = \sqrt{ab + d^2}}$$

ב. נשתמש במשפט הסינוסים

$\triangle ABD$

$$\frac{b}{\sin(b-a)} = \frac{d}{\sin a} \rightarrow (1) \frac{\sin a}{\sin(b-a)} = \frac{d}{b}$$

כיוון שנתון $a + b = 90^\circ$ הרי ש- $\triangle BDC$ ישר זווית, ניעזר במשפט פיתגורס:

$$a^2 = (\sqrt{ab + d^2})^2 + d^2$$

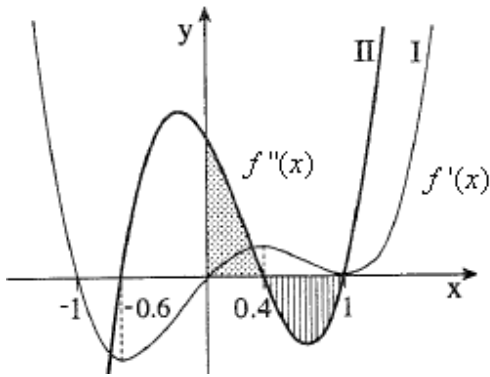
$$a^2 = ab + 2d^2$$

$$a^2 - ab = 2d^2 \quad /: 2b^2 \neq 0$$

$$\frac{a^2 - ab}{2b^2} = \frac{d^2}{b^2} \rightarrow (2) \frac{d}{b} = \sqrt{\frac{a^2 - ab}{2b^2}}$$

$$\frac{\sin a}{\sin(b-a)} = \sqrt{\frac{a^2 - ab}{2b^2}} \quad \text{ובאמצעות כלל המעבר}$$

הוכח !



א. כאשר ל: $f'(x)$ יש נקודת קיצון, הרי שבוודאות $f''(x) = 0$

גרף I מתקיים קיצון עבור $x = 0.4$ וגרף II מתאפס שם,

גרף I מתקיים קיצון עבור $x = -0.6$ וגרף II מתאפס שם.

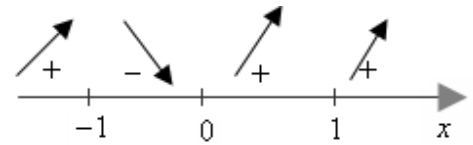
תשובה: גרף I - $f'(x)$, גרף II - $f''(x)$

ב. נראה, בסיוע הגרף הנתון של פונקציית הנגזרת הראשונה

טבלת עלייה ירידה של $f(x)$.

בתחום $x > 0$ או $x < -1$ $f'(x)$ אי-שלילית ולכן $f(x)$ עולה.

בתחום $-1 < x < 0$ $f'(x)$ שלילית ולכן $f(x)$ יורדת.



בהתאם: $x = 0$ מינימום, $x = -1$ מקסימום ($x = 1$ פיתול)

תשובה: $x = 0$ מינימום, $x = -1$ מקסימום

ג. נראה, בסיוע הגרף הנתון של פונקציית הנגזרת השנייה

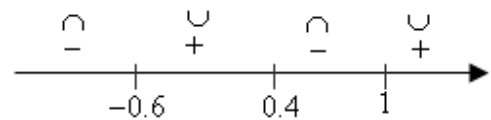
טבלת קעירות של $f(x)$.

בתחום $x > 1$ או $-0.6 < x < -0.4$ מתקיים $f''(x) > 0$

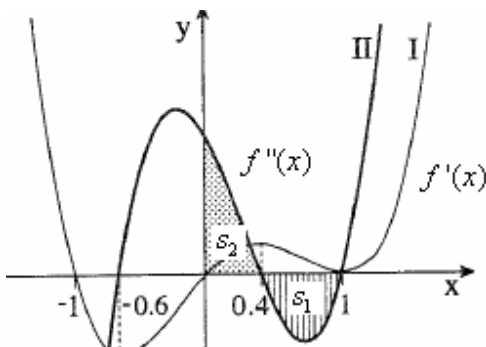
ובהתאם $f(x)$ קעורה כלפי מעלה.

בתחום $0.4 < x < 1$ או $x < -0.6$ מתקיים $f''(x) < 0$

ולכן $f(x)$ קעורה כלפי מטה.



תשובה: $x = -0.6$, $x = 0.4$, $x = 1$ נקודת פיתול



ד. נחשב כל שטח בנפרד

$$S_1 = \int_{0.4}^1 (0 - f''(x)) dx = -f'(x) \Big|_{0.4}^1 = -f'(1) + f'(0.4) = f'(0.4)$$

$$S_2 = \int_0^{0.4} (f''(x) - 0) dx = f'(x) \Big|_0^{0.4} = f'(0.4) + f'(0) = f'(0.4)$$

כלומר: $S_1 = S_2$

תשובה: הוכח !

א. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$

$$f'(x) = 1 - \cos 2x$$

$$f'(x) = 1 - (1 - 2\sin^2 x)$$

$$\boxed{f'(x) = 2\sin^2 x}$$

הוכח !

ב. (1) פונקציית הנגזרת חיובית לכל $\sin x \neq 0$, כלומר עבור $x \neq pk$ ולכן הפונקציה עולה לכל x .
עבור $x = pk$ יהיה המשיק מקביל לציר ה- x , אך אלו תהיינה נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.
תשובה: לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.

(2) כפי שהראינו, עבור $x = pk$ יש נקודות פיתול, בהן המשיק מקביל לציר ה- x , אך תיתכנה נוספות:

$$f''(x) = 4\sin x \cos x$$

$$\boxed{f''(x) = 2\sin 2x}$$

$$\sin 2x = 0 \rightarrow x = \frac{p}{2}k$$

כלומר, נקודות פיתול תהיינה עבור $x = \frac{p}{2}k$ (הערה – ניתן להסתפק בהסבר של סעיף ב (1))

תשובה: לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול

ג. נמצא את נקודות החיתוך בין $g(x) = x + \sin^2 x$

לישר $y = x$, בתחום $-p \leq x \leq p$.

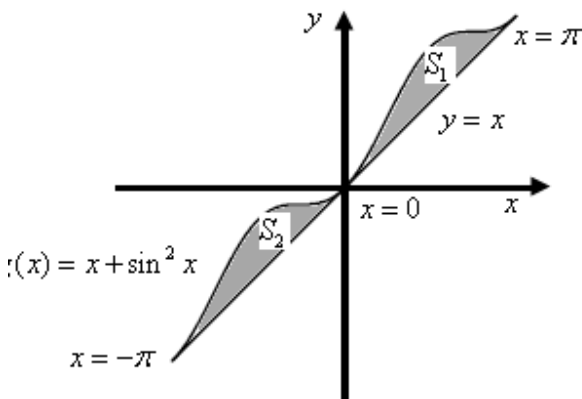
$$x + \sin^2 x = x$$

$$\sin^2 x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = -p, x = 0, x = p$$

ולכן גרף הפונקציה $g(x)$ מעל לישר $y = x$



$$S = \int_0^p (x + \sin^2 x - x) dx + \int_{-p}^0 (x + \sin^2 x - x) dx$$

$$S = \int_0^p (\sin^2 x) dx + \int_{-p}^0 (\sin^2 x) dx$$

$$S = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_0^p + \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_{-p}^0 \leftarrow S$$

$$S = \left(\left(\frac{p}{2} - \frac{\sin(2p)}{4} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(2 \cdot 0)}{4} \right) \right) + \left(\left(\frac{0}{2} - 4 \right) - \left(\frac{-p}{2} - \frac{\sin(2p)}{4} \right) \right)$$

$$S = \frac{p}{2} + \frac{p}{2}$$

$$\boxed{S = p}$$

תשובה: p יח"ר

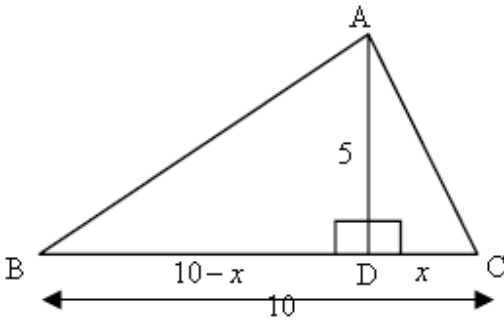
א. הפונקציה שיש להביא לאקסיומוס היא היקף המשולש.

x - אורך הקטע CD (ס"מ)

ניעזר במשפט פיתגורס בשני המשולשים ישרי הזווית

$$f(x) = 10 + \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{5^2 + (10-x)^2}$$

$$f(x) = 10 + \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{125 - 20x + x^2}$$



$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}} + \frac{2x-20}{2\sqrt{125-20x+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{125-20x+x^2} + (x-10)\sqrt{25+x^2}}{\sqrt{25+x^2}\sqrt{125-20x+x^2}}$$

$$0 = x\sqrt{125-20x+x^2} + (x-10)\sqrt{25+x^2}$$

$$x\sqrt{125-20x+x^2} = (10-x)\sqrt{25+x^2} \quad (*)^2$$

$$x^2(125-20x+x^2) = (100-20x+x^2)(25+x^2)$$

$$125x^2 - 20x^3 + x^4 = 2500 + 100x^2 - 500x - 20x^3 + 25x^2 + x^4$$

$$500x = 2500$$

$$x=5 \quad 5\sqrt{125-20 \cdot 5+5^2} = (10-5)\sqrt{25+5^2} \rightarrow 5\sqrt{50} = 5\sqrt{50} \text{ o.k.}$$

$$f'(4) = \frac{4\sqrt{125-20 \cdot 4+4^2} + (4-10)\sqrt{25+4^2}}{+} = -7.17 < 0$$

$$f'(6) = \frac{6\sqrt{125-20 \cdot 6+6^2} + (6-10)\sqrt{25+6^2}}{+} = 7.17 < 0$$

הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות עבור $x=5$, כלומר הפונקציה מירידה לעליה וזה מינימום

קבלנו שהמשולש שווה שוקיים, שכן הגובה הוא גם תיכון,

כיוון שהתיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה – הרי שהמשולש הוא גם ישר זווית.

$$AC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

תשובה: צלעות המשולש 10 ס"מ, $5\sqrt{2}$ ס"מ, $5\sqrt{2}$ ס"מ

ב. המשולש הוא ישר זווית ושווה שוקיים (כנראה תשובה מספקת)

תכונותיו: זוויות בסיס שוות 45° , חוצה הזווית הראש מתלכד עם הגובה ועם התיכון לביסי.

מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר.