קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת – שאלונים 806, 807

משפטים הקשורים לנגזרת הראשונה $f'(x)$:

1. **אם x_1 היא נקודת קיצון פנימית של הפונקציה $f(x)$ אז $f'(x)=0$.**
   (ההיפך לא בהכרח נכון, ולכן יש את המושג "נקודה חשודה בקיצון").

2. **אם בנקודה x_1 מתקיים $f'(x_1)=0$ ו- $f''(x_1)\neq 0$ אז ל- $f(x)$ יש ערך קיצון בנקודה x_1.**
   ערך זה הוא מינימום מקומי אם $f''(x_1)>0$ והוא מקסימום מקומי אם $f''(x_1)<0$.

3. **x_1 היא נקודה פנימית בתחום של הפונקציה $f(x)$ אז:**
   אם $f'(x_1)>0$ אז הפונקציה עולה בנקודה x_1.
   אם $f'(x_1)<0$ אז הפונקציה יורדת בנקודה x_1.

משפטים הקשורים לנגזרת השנייה $f''(x)$:

1. **אם $f''(x_1)>0$ אז הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ בנקודה x_1.**
   אם $f''(x_1)<0$ אז הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בנקודה x_1.

2. **אם x_1 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אז $f''(x_1)=0$.**
   (ההיפך לא בהכרח נכון, ולכן יש את המושג "נקודה חשודה בפיתול").

3. **נתונה הפונקציה $f(x)$ הגזירה n פעמים בנקודה x_1. אם כל $(n-1)$ הנגזרות הראשונות ב- x_1 שוות לאפס ואילו הנגזרת ה-n ב- x_1 שונה מאפס $(f^{(n)}(x_1)\neq 0)$, אז אם n אי-זוגי הנקודה x_1 היא נקודת פיתול, ואם n זוגי הנקודה x_1 היא נקודת קיצון.**
   סוג הקיצון - מינימום מקומי אם $f^{(n)}(x_1)>0$ ומקסימום מקומי אם $f^{(n)}(x_1)<0$.

4. **מסקנה מהמשפט האחרון הנ"ל – שאם $f''(x_1)=0$ ו- $f'''(x_1)\neq 0$ אז x_1 היא נקודת פיתול.**

<u>מקרים:</u>

<u>מקרה ראשון:</u>

כאשר נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ ורוצים לתאר את גרף הפונקציה $f(x)$, או כאשר נתון גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$ ורוצים לתאר את גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$.

1. **נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$ יהיו הנקודות שבהן הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה –x ועוברת מצד אחד שלו לצד השני שלו.**

(אם המעבר של $f'(x)$ הוא מחיוביות לשליליות אז הנקודה היא נקודת מקסימום של $f(x)$, ואם המעבר של $f'(x)$ הוא משליליות לחיוביות אז הנקודה היא נקודת מינימום של $f(x)$).

2. **אם הגרף של $f'(x)$ רק נוגע בציר ה-x (משיק לו) אבל לא חותך אותו, אז הנקודה היא נקודת פיתול של $f(x)$ שהמשיק בה מקביל לציר ה-x.**
לפיכך חשוב לשרטט נכון את גרף הפונקציה, בנקודה זו, ולהקפיד שהמשיק יקביל לציר ה-x.

3. **בתחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית אז הפונקציה $f(x)$ עולה, ובתחום שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית אז הפונקציה $f(x)$ יורדת.**

4. **<u>הערות:</u>**

א. כאשר נתון גרף הפונקציה $f'(x)$ יש להכין טבלה שבה יוכנסו תחום ההגדרה, ונקודות החיתוך עם ציר ה-x. החיוביות של הפונקציה $f'(x)$ תסומן בחץ עולה והשליליות של הפונקציה $f'(x)$ תסומן בחץ יורד. כך ניתן לגלות את נקודות הקיצון של $f(x)$.
ב. לאחר שרטוט גרף הפונקציה $f(x)$ וודאו בעזרת "רכיבה על האופניים משמאל לימין" על גרף הפונקציה $f(x)$ שאכן קיבלתם את הפונקציה $f'(x)$ הנתונה.

<u>מקרה שני:</u>

כאשר נתון גרף הפונקציה $f(x)$ ורוצים לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$, או כאשר נתון גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ ורוצים לתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

1. **בכל נקודת קיצון פנימית של הפונקציה $f(x)$, הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה- x.**

(אם הנקודה היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$ אז הגרף של $f'(x)$ עובר משליליות לחיוביות, ואם הנקודה היא נקודת מקסימום של הפונקציה $f(x)$ אז הגרף של $f'(x)$ עובר מחיוביות לשליליות).

2. בכל נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ יש לפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

שימו לב!
הסדר בין הפונקציות השונות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ יהיה:
א. פיתול בפונקציה $f(x)$.
ב. קיצון בפונקציה $f'(x)$.
ג. חיתוך עם ציר ה-x בפונקציה $f''(x)$.
זכרו! במשפט נאמר - " אם x_1 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אז $f''(x_1)=0$.
ולכן בפונקצית הנגזרת $f'(x)$ הנקודה x_1 חייבת להיות נקודת קיצון.

3. בהתאם לאותו הסדר הנ"ל, בכל נקודת פיתול של $f'(x)$, יש לפונקצית הנגזרת השנייה $f''(x)$ נקודת קיצון פנימית ולהיפך.

4. בתחום שבו הפונקציה $f(x)$ עולה אז פונקצית $f'(x)$ היא חיובית, ובתחום שבו הפונקציה $f(x)$ יורדת אז פונקצית $f'(x)$ היא שלילית.
("רכיבה על האופניים משמאל לימין" על גרף הפונקציה $f(x)$).

5. **הערה:**
על מנת לשרטט את גרף הפונקציה $f'(x)$ נקבל מידע בשאלה עצמה לגבי מספר נקודות הפיתול שיש לפונקציה $f(x)$ או נקבל מידע לגבי כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $f'(x)$.

6. <u>הקשר בין נקודת פיתול של הפונקציה</u> $f(x)$ <u>לנקודת קיצון של</u> $f'(x)$:

א. אם בנקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$, הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מטה $\cap$ לקעירות כלפי מעלה $\cup$ אז לפונקצית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת מינימום פנימית בנקודה זו.

ב. אם בנקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$, הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מעלה $\cup$ לקעירות כלפי מטה $\cap$ אז לפונקצית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת מקסימום פנימית בנקודה זו.

ג. המעבר של הפונקציה $f(x)$ מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך, יכול להתבצע כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת, ולכן בעזרת $f'(x)$ נקבע אם $f(x)$ עולה או יורדת.

שימו לב!

לפונקציה $f(x)=x^3$ יש נקודת פיתול בנקודה $(0,0)$, והיא עוברת מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה. פונקצית הנגזרת שלה $f'(x)$ שווה ל- $3x^2$ וזו פרבולה צוחקת שיש לה מינימום.
מומלץ לזכור מקרה פרטי זה ולהיעזר בו בקשר בין נקודת הפיתול של $f(x)$ לנקודת הקיצון של $f'(x)$.

ג. <u>הקשר בין תחומי הקעירות של הפונקציה</u> $f(x)$ <u>לתחומי העלייה והירידה של</u> $f'(x)$.

תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי העלייה של הפונקציה $f'(x)$.
ותחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי הירידה של הפונקציה $f'(x)$.
(בחיפוש תחומי הקעירות של $f(x)$ נדרוש $f''(x) > 0$ וגם לתחומי העלייה של הפונקציה $f'(x)$ נדרוש $f''(x) > 0$, הדרישות זהות).

<u>הערה</u>: תחום הקעירות כלפי מעלה של הפונקציה $f(x) = x^3$ הוא $x > 0$, וזה גם תחום העלייה של הפונקציה $y = 3x^2$ (הנגזרת שלה).

<u>זיהוי גרפים של הפונקציות השונות:</u>

1. **כאשר נתונים, באותה מערכת צירים, הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $f'(x)$ ויש לזהות איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות.**
ניתן להיעזר בנקודות הקיצון של אחת הפונקציות ולראות שאכן בפונקציה השנייה יש חיתוך עם ציר ה- x.
ניתן להיעזר בתחומי עלייה וירידה של אחת מהפונקציה ולבדוק חיוביות ושליליות בפונקציה השנייה.

2. **כאשר נתונים הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $f''(x)$ ויש לזהות איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות.**
ניתן להיעזר בנקודות שבהן יש שינוי קעירות (נקודות פיתול) בפונקציה אחת, כאשר בפונקציה השנייה, באותו שיעור ה-x, יהיה חיתוך עם ציר ה-x.

<u>פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית:</u>

הגדרה מתמטית לפונקציה זוגית: $f(-x) = f(x)$ (תמונת מראה, סימטריות, ביחס לציר ה-y).
הגדרה מתמטית לפונקציה אי-זוגית: $f(-x) = -f(x)$ (תמונת מראה ביחס לשני הצירים).
קיימות פונקציות שהן לא זוגיות ולא אי-זוגיות.
באופן כללי ניתן להגיד - שנגזרת של פונקציה משנה את הזוגיות שלה, כלומר הנגזרת של פונקציה זוגית היא אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
דוגמאות:
א. הפונקציה $y = x^3$ היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת שלה $y' = 3x^2$ היא פונקציה זוגית.
ב. הפונקציה $y = x^4$ היא פונקציה זוגית והנגזרת שלה $y = 4x^3$ היא פונקציה אי-זוגית.
ג. הפונקציה $y = \sin x$ היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת שלה $y' = \cos x$ היא פונקציה זוגית.
ניתן לנצל תכונות של סימטריות למעברים בין הפונקציות השונות - $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.