א. נסמן ב- x את מהירות ההולך (קמ"ש, קבועה)

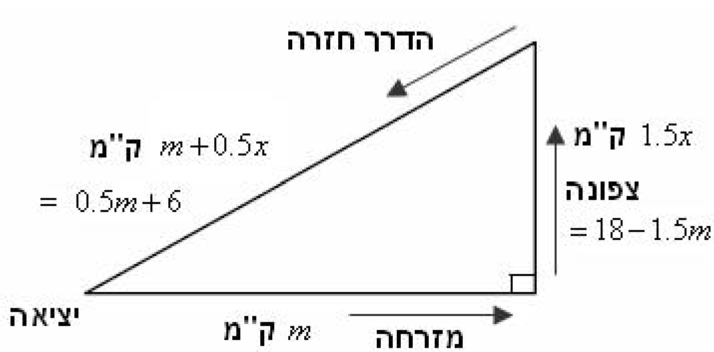
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מזרחה	$\frac{m}{x}$	x	m
צפונה	1.5	x	$1.5x$
חזרה	$\frac{m}{x}+1.5-1$	x	$m+0.5x$

סך הכול המסלול 24 **ק"מ.**

המשוואה המתאימה, אם כן, היא:

$$m+1.5x+m+0.5x=24$$
$$2m=24-2x$$
$$2x=24-2m$$
$$x=12-m$$



ולכן אורך הדרך חזרה: $m+0.5(12-m)=0.5m+6$

ואורך הדרך צפונה: $1.5(12-m)=18-1.5m$

ע"פ משפט פיתגורס

$$(0.5m+6)^2=(18-1.5m)^2+m^2$$

נפתור את המשוואה:

$$(0.5m+6)^2=(18-1.5m)^2+m^2$$
$$0.25m^2+6m+36=324-54m+2.25m^2+m^2$$
$$3m^2-60m+288=0$$
$$m_{1,2}=\frac{60\pm12}{6}$$
$$\cancel{m_1=12\to x=0}\quad\leftarrow x>0$$
$$m_2=8\quad\to x=4\quad o.k.$$

תשובה: $m=8$ **(ק"מ).**

1. נבדוק עבור $n=1$:

אגף ימין: $5-\frac{5}{1+1}=2.5$ $<$ **אגף שמאל:** $S_1=a_1=\frac{5}{2^2}=1.25$

לכן, הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה), כלומר:** $S_k<5-\frac{5}{k+1}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **, לכן צ"ל**

$$S_{k+1}<5-\frac{5}{k+2}$$

$$\underset{\downarrow}{\underline{S_k}}+a_{k+1}<5-\frac{5}{k+2}$$

$$5-\frac{5}{k+1}+\frac{5}{(k+2)^2}\le 5-\frac{5}{k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הגדול ממנו,

לכן, די אם נוכיח אי-שוויון חלש (כולל סימן השוויון)

$$\Leftrightarrow 5-\frac{5(k+2)^2-5(k+1)}{(k+1)(k+2)^2}\le 5-\frac{5}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow 5-\frac{5(k^2+4k+4-k-1)}{(k+1)(k+2)^2}\le 5-\frac{5(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 5-\frac{5\boxed{(k^2+3k+3)}}{(k+1)(k+2)^2}\le 5-\frac{5\boxed{(k^2+3k+2)}}{(k+1)(k+2)^2}$$

כיוון שהכופל במסגרת הימנית חיובי וקטן מהכופל במסגרת השמאלית, בעוד ששני המכנים חיוביים,

עבור k **טבעי, הרי שהמחסר באגף ימין גדול מהמחסר באגף שמאל, ואגף שמאל קטן מאגף ימין.**

מתקבל שאגף שמאל קטן מאגף ימין.

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$ **, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

ב. נתון כי $S_n<4.999$ **כאשר הוכחנו כי** $S_n<5-\frac{5}{n+1}$

על-מנת שהנתון יתקבל בוודאות נדרש

$$5-\frac{5}{n+1}\le 4.999$$

$$0.001\le\frac{5}{n+1}\quad /\cdot(n+1>0)$$

$$n+1\le 5000$$

$$n\le 4999$$

תשובה: 4999 איברים לכל היותר

נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$ **בתחום** $-\frac{3\text{®}}{2} < x < \frac{\text{®}}{2}$

נקודת ההשקה: $f(0) = \frac{\cos 0}{\sqrt{1-\sin 0}} = 1 \rightarrow \mathrm{A}(0,1)$

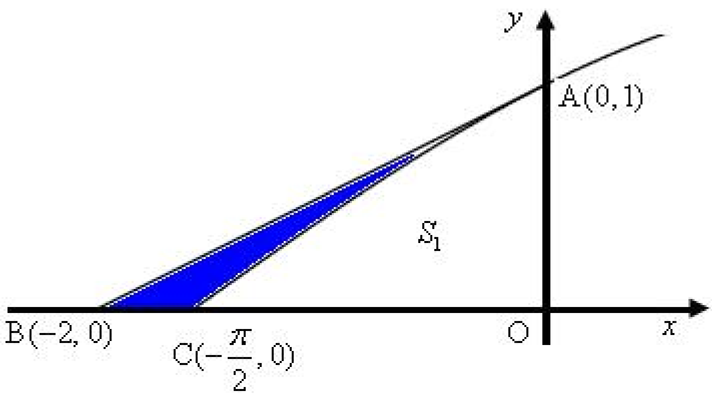
$$f'(x) = \frac{-\sin x\sqrt{1-\sin x} - \frac{-\cos^2 x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{1-\sin x} \quad \rightarrow \quad m = f'(0) = \frac{-\sin 0\sqrt{1-\sin 0} - \frac{-\cos^2 0}{2\sqrt{1-\sin 0}}}{1-\sin 0} = 0.5$$

נמצא את משוואת המשיק: $(0,1),\ m = 0.5$ **:** $y - 1 = 0.5(x-0) \rightarrow y = 0.5x + 1$

נמצא את נקודות החיתוך בין $y = 0.5x + 1$

לציר ה- x **,** $0 = 0.5x + 1 \rightarrow \mathrm{B}(-2, 0)$ **.**

נמצא את נקודות החיתוך בין הפונקציה לציר ה- x



$$0 = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$$

$$\cos x = 0$$,

$$x = \frac{\text{®}}{2} + \text{®}k \rightarrow \mathrm{C}(-\frac{\text{®}}{2}, 0) \quad \leftarrow k = -1$$

נחשב את השטח המבוקש: $S_{\mathrm{BLUE}} = S_{\Delta\mathrm{AOB}} - S_1$

$$S_{\Delta\mathrm{AOB}} = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$$

נחשב את האינטגרל, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית

של הביטוי שבתוך השורש הריבועי

$$S_1 = \int_{-\frac{\text{®}}{2}}^{0} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} - 0\right) dx = \int_{-\frac{\text{®}}{2}}^{0} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}\right)\cdot(-\cos x)\ dx$$

$$S_1 = (-2\sqrt{1-\sin x})\Big]_{\frac{\text{®}}{2}}^{0}$$

$$S_1 = (-2\sqrt{1-\sin 0}) - (-2\sqrt{1-\sin(-\frac{\text{®}}{2})})$$

$$S_1 = -2 - (-2\sqrt{2})$$

$$\boxed{S_1 = 2\sqrt{2} - 2}$$

$$S_{\mathrm{BLUE}} = 1 - (2\sqrt{2} - 2) = 3 - 2\sqrt{2}$$

תשובה: $3 - 2\sqrt{2}$ **יח"ר**

א. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-b}$ **,** $a,b>0$ **,** $a\neq b$**.**

שיעור ה- x **של נקודות החיתוך עם ציר ה-** y **:** $x=a \rightarrow$ $0=\frac{x-a}{x-b}$

$$f'(x)=\frac{x-b-(x-a)}{(x-b)^2}$$

$$f'(x)=\frac{a-b}{(x-b)^2}$$

$$f'(0)=\frac{a-b}{(0-b)^2}=\frac{a-b}{b^2}$$

$$f'(a)=\frac{a-b}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b} \quad \leftarrow a\neq b$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{b^2} \quad \leftarrow f'(a)=f'(0)$$

$$\cancel{b^2}=a^2-2ab+\cancel{b^2}$$

$$\boxed{a=2b} \quad \leftarrow /:a>0$$

נציב $a=2b$ **ונקבל:** $\boxed{f(x)=\frac{x-2b}{x-b}}$ **,** $f(x)=\frac{x-2b}{x-b}$ $b>0$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2b}{x-b}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2b}{x}}{1-\frac{b}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0}{1-0}=1$ **, לכן** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית**

$$\lim_{x\to b^+}\frac{x-2b}{x-b}=\frac{b-2b}{b^+-b}=\frac{-b}{0^+}=-\infty \quad \leftarrow b>0$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{x-2b}{x-b}=\frac{b-2b}{b^--b}=\frac{-b}{0^-}=+\infty \quad \leftarrow b>0$$

, לכן $x=b$ **אסימפטוטה אנכית**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית ,** $x=b$ **אסימפטוטה אנכית**

ג. נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{x-b-(x-2b)}{(x-b)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{b}{(x-b)^2}}$$

כיוון ש- $b>0$ **הפונקציה עולה לכל** $x\neq b$

תשובה: עלייה - $x\neq b$ **, ירידה – אף** x

ד. בנקודת חיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל:** $(2b,0)$

בנקודת חיתוך עם ציר y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,2)$

תשובה: $(0,2)$ **,** $(2b,0)$ **.**

ה. נמצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

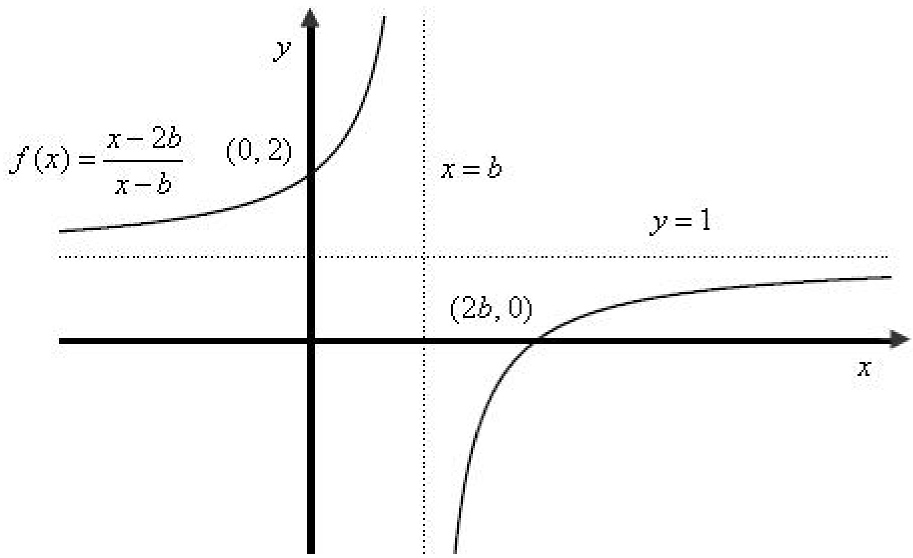
$$f''(x)=-\frac{2b(x-b)}{(x-b)^4} \quad \rightarrow \quad \boxed{f''(x)=\frac{2b(b-x)}{(x-b)^4}}$$

כיוון ש- $b>0$ **הכופל שקובע את סימן הנגזרת השנייה הוא** $b-x$

ועבור $x=b$ **אין נקודת פיתול, שכן לא בתחום ההגדרה.**

תשובה: קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x<b$ **, קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור** $x>b$ **.**

ו. עבור $b>0$ **הסקיצה המתאימה**



ז. נמצא תחומי עלייה וירידה

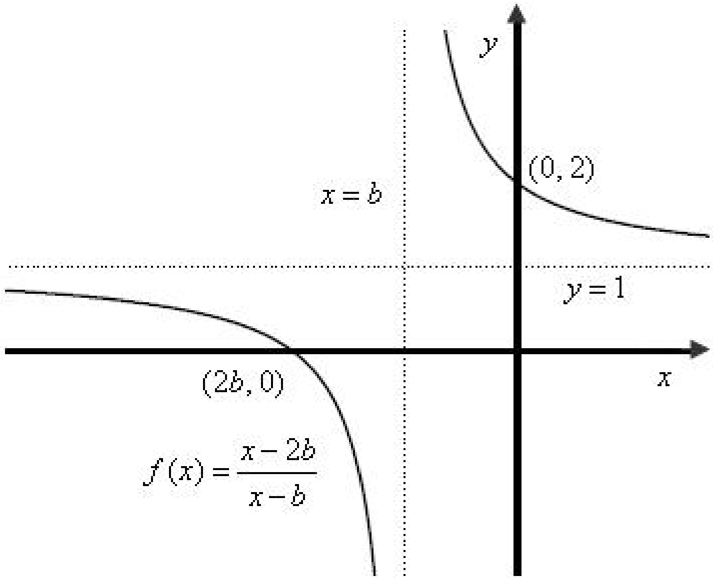
$$f'(x)=\frac{b}{(x-b)^2}$$

כיוון ש- $b<0$ **הפונקציה יורדת לכל** $x\neq b$

$$f''(x)=\frac{2b(b-x)}{(x-b)^4}$$

כיוון ש- $b<0$ **קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור** $x>b$ **,**

קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x<b$ **.**

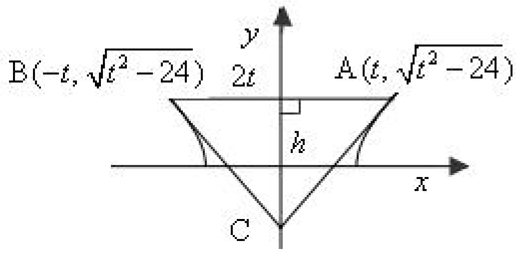


y
$(0, 2)$
$x = b$
$y = 1$
$(2b, 0)$
x
$f(x) = \frac{x-2b}{x-b}$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-24}$

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-24}=\sqrt{x^2-24}=f(x)$ **ובהתאם הפונקציה זוגית.**

א. הפונקציה שיש להביא למינימום היא שטח המשולש ABC **.**



נסמן: t **- שיעור ה-** x **של הנקודה** A **.**

בהתאם שיעורי הנקודה A **שעל גרף הפונקציה** $A(t,\sqrt{t^2-24})$

כיוון שהפונקציה זוגית, הרי ששיעורי הנקודה $B(-t,\sqrt{t^2-24})$

בהתאם צלע המשולש $\boxed{AB=2t}$

נמצא את משוואת המשיק,ושיעורי הנקודה C **וגובה המשולש**

$$f'(x)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-24}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-24}}$$

$$m(x=t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}\quad\to y-\sqrt{t^2-24}=\frac{t}{\sqrt{t^2-24}}(x-t)$$

$$x_C=0\quad\to y_C=\frac{-t^2}{\sqrt{t^2-24}}+\sqrt{t^2-24}$$

$$h=\sqrt{t^2-24}-(\frac{-t^2}{\sqrt{t^2-24}}+\sqrt{t^2-24})\quad\to\boxed{h=\frac{t^2}{\sqrt{t^2-24}}}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{2t\cdot\frac{t^2}{\sqrt{t^2-24}}}{2}\quad\to\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{t^3}{\sqrt{t^2-24}}}$$

$$S'(t)=\frac{3t^2\sqrt{t^2-24}-\frac{2t^4}{2\sqrt{t^2-24}}}{t^2-24}=\frac{3t^2(t^2-24)-t^4}{(t^2-24)\sqrt{t^2-24}}$$

$$\boxed{S'(t)=\frac{2t^4-72t^2}{(t^2-24)\sqrt{t^2-24}}}$$

$$0=2t^4-72t^2$$

$$t=6\quad\leftarrow x_A>0\quad s'(5)=\frac{2\cdot5^4-72\cdot5^2}{+}=\frac{-625}{+}<0,\quad s'(7)=\frac{2\cdot7^4-72\cdot7^2}{+}=\frac{1127}{+}>0$$

$$\boxed{t=6,\quad Min}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{6^3}{\sqrt{36-24}}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{216}{\sqrt{12}}}$$

תשובה: השטח המינימלי של משולש ABC **הוא** $\frac{216}{\sqrt{12}}$ **יח"ר**