.1

נתונה הפרבולה $y^2=(k-2)x$ **,** $k>2$ **.**

ונתון המעגל $(x-3)^2+y^2=2k-4$

א. שני העקומים סימטריים לציר ה- x

ולכן למשוואה הריבועית שתתקבל מהשוואתם יהיו שני פתרונות שמתלכדים $(\Delta=0)$

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=2k-4\\ y^2=(k-2)x\end{cases}$$

$$(x-3)^2+(k-2)x=2k-4$$

$$x^2-6x+9+(k-2)x-2k+4=0$$

$$\boxed{x^2+(k-8)x-2k+13=0}$$

$$a=1 \quad b=k-8 \quad c=-2k+13$$

$$\underline{\Delta=0}$$

$$(k-8)^2-4\cdot1\cdot(-2k+13)=0$$

$$k^2-16k+64+8k-52=0$$

$$k^2-8k+12=0$$

$$(k-2)(k-6)=0$$

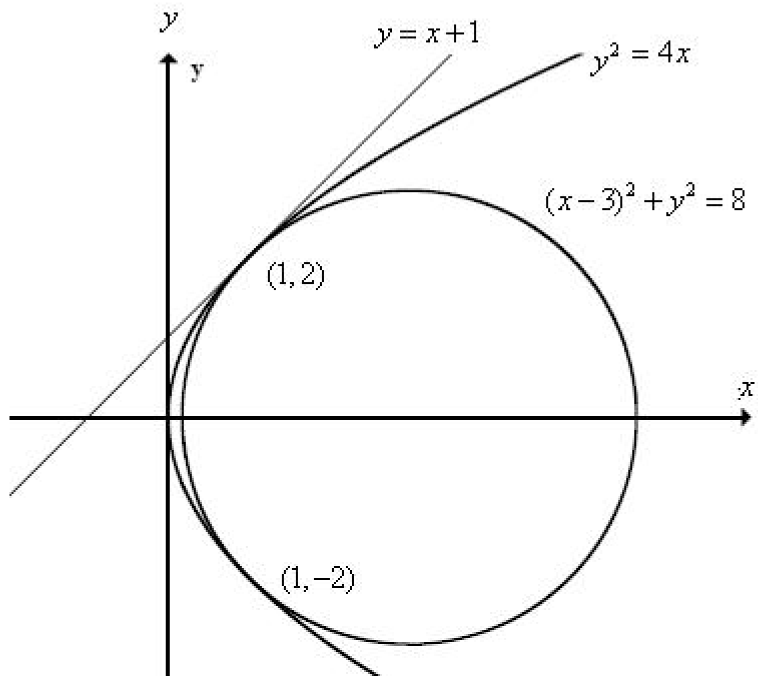
$$\boxed{k=6} \quad \leftarrow k>2$$

תשובה: $k=6$

ב. משוואת הפרבולה: $y^2 = 4x$

משוואת המעגל: $(x-3)^2 + y^2 = 8$.

השרטוט המתאים:



נמצא את נקודות ההשקה:

$$x^2 + (k-8)x - 2k + 13 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \leftarrow k = 6$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

$$y^2 = 4 \cdot 1$$

$$y = \pm 2$$

$$\boxed{(1,2), \quad (1,-2)}$$

מכיוון ונדרש משיק עם שיפוע חיובי, הרי שנקודת ההשקה היא: $(1,2)$

משוואת משיק לפרבולה: $yy_0 = p(x + x_0)$

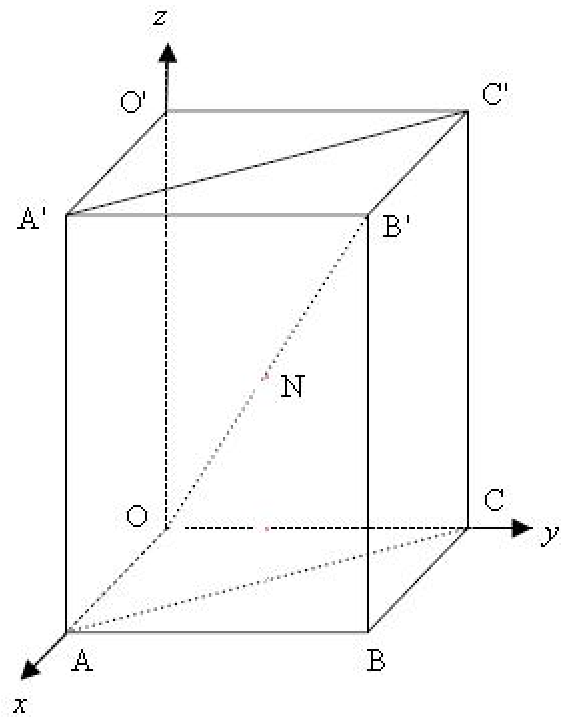
משוואת הפרבולה $y^2 = 4x$ לכן $p = 2$

ובהתאם: $y \cdot 2 = 2(x+1)$

תשובה: $y = x + 1$

.2

א. נמקם את הנקודה O **כראשית הצירים, דבר המתאפשר בשל מקצועות התיבה המאונכים זה לזה.**



נתון: $\overrightarrow{OB'} = (2, 4, 6)$

מכיוון ו- $O(0, 0, 0)$ **ראשית הצירים נקבל:**

$OA = 2$ **,** $OC = 4$ **,** $OO' = 6$

נעלה את כל שיעורי הנקודות המשתתפות, בהתאם לנתונים ולתרגיל

$O(0, 0, 0)$ $A(2, 0, 0)$ $C(0, 4, 0)$ $B(2, 4, 0)$

$O'(0, 0, 6)$ $A'(2, 0, 6)$ $C'(0, 4, 6)$ $B'(2, 4, 6)$

$N(1, 2, 3)$

המרובע $AA'C'C$ **הוא מלבן**

($A'C' = A'C'$ **וגם** $A'C' \,\|\, A'C'$ **לכן מקבילית**

המקצוע הצדדי OA **מאונך לבסיס ולכן גם ל-** AC **והמקבילית הופכת למלבן)**

$\overrightarrow{OB'}$ **הוא אלכסון התיבה, שאלכסוניה נחתכים במרכזה,**

כאשר מרכז התיבה הוא גם מפגש אלכסוני המלבן

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}(\underline{2, 4, 6}) = \underline{x} = (1, 2, 3)$$

ובהתאם: $N(1, 2, 3)$

תשובה: $N(1, 2, 3)$

ב. נמצא את משוואת המישור AA'C'C

$$\overrightarrow{AA'} = \underline{A} - \underline{A}$$
$$\overrightarrow{AA} = \underline{x} = (0, 0, 6)$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{C} - \underline{A}$$
$$\overrightarrow{AC} = \underline{x} = (\text{-}2, 4, 0)$$

ההצגה הפרמטרית: $® : \underline{x} = (2, 0, 0) + s(0, 0, 6) + u(-2, 4, 0)$

נעבור למשוואת המישור באמצעות חישוב דטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ x-2 & y-0 & z-0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(0-24) - (y-0)(0+12) + (z-0)(0-0) = 0$$
$$-24x - 12y = 0$$
$$\boxed{2x + y = 0}$$

נמצא את הזווית הנדרשת באמצעות הנוסחה: $\cos\sim = \dfrac{|u \cdot n|}{|u||n|}$

כאשר u **הוא הוקטור** $\overrightarrow{OB'} = \underline{x} = (2, 4, 6)$**,**

n **הוא הוקטור הנורמל למישור** AA'C'C **שהוא:** $\underline{x} = (2, 1, 0)$

$$\cos\sim = \frac{|(2, 4, 6) \cdot (2, 1, 0)|}{|(2, 4, 6)||(2, 1, 0)|}$$

$$\cos\sim = \frac{|(2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}}$$

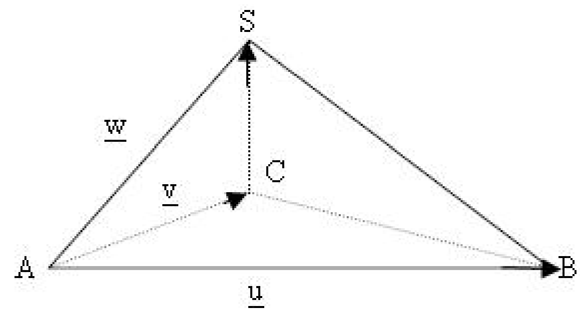
$$\cos\sim = \frac{8}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{5}} = 0.478$$

$$\boxed{\sim = 61.439°}$$

תשובה: $61.439°$

.3

א.



$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{AC} = \underline{v}}$ $\boxed{\overrightarrow{AS} = \underline{w}}$

$$\underline{u}\cdot\underline{w} = |\underline{u}||\underline{w}|\cos\measuredangle SAB = 0.5|\underline{u}||\underline{w}| \quad \leftarrow \measuredangle SAB = 60°$$

$$\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}|\cos\measuredangle SAC = \frac{\sqrt{3}}{2}|\underline{v}||\underline{w}| \quad \leftarrow \measuredangle SAC = 30°$$

$$\underline{u}\cdot\underline{w} - \underline{v}\cdot\underline{w} = 0.5|\underline{u}||\underline{w}| - \frac{\sqrt{3}}{2}|\underline{v}||\underline{w}|$$

$$\underline{w}\cdot(\underline{u} - \underline{v}) = 0.5|\underline{u}||\underline{w}| - \frac{\sqrt{3}}{2}|\underline{v}||\underline{w}|$$

$$\overrightarrow{AS}\cdot(\overrightarrow{CB}) = 0.5|\underline{u}||\underline{w}| - \frac{\sqrt{3}}{2}|\underline{v}||\underline{w}|$$

$$0 = 0.5|\underline{u}||\underline{w}| - \frac{\sqrt{3}}{2}|\underline{v}||\underline{w}| \quad \leftarrow \overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{CB}$$

$$0 = |\underline{u}| - \sqrt{3}|\underline{v}| \quad \leftarrow : 0.5|\underline{w}| \neq 0$$

$$\sqrt{3}|\underline{v}| = |\underline{u}|$$

$$\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

תשובה: $\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ב. ע"פ משפט א: ישר ניצב למישור אם ורק אם הוא מאונך לשני ישרים לא מקבילים במישור

נתון: $\overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{CB}$ **ולכן:** $\overrightarrow{CB}$ **מאונך למישור הפאה** SAC **, ובהתאם:** $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$

עפ"י א: $\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos\measuredangle CAB = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}$$

$$\cos\measuredangle CAB = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\measuredangle CAB = 54.74°$$

תשובה: $\measuredangle CAB = 54.74°$

4. א.

נסמן $z=\cos\sim+i\sin\sim$

נראה כי $z=cis(\sim)\rightarrow\bar{z}=cis(-\sim)$

$$z=cis\sim$$

$$z=\cos\sim+i\sin\sim$$

$$\bar{z}=\cos\sim-i\sin\sim$$

$$\bar{z}=\cos(-\sim)+i\sin(-\sim)\quad\rightarrow\cos x=\cos(-x),\sin(x)=-\sin(-x)$$

$$\bar{z}=cis(-\sim)$$

$$\boxed{z=cis(\sim)\rightarrow\bar{z}=cis(-\sim)}$$

נוכיח כי $(\bar{z})^n=\overline{z^n}$ **, תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:**

$$(\bar{z})^n=(\overline{cis\sim})^n=(cis(-\sim))^n=(cis(-n\sim))=$$

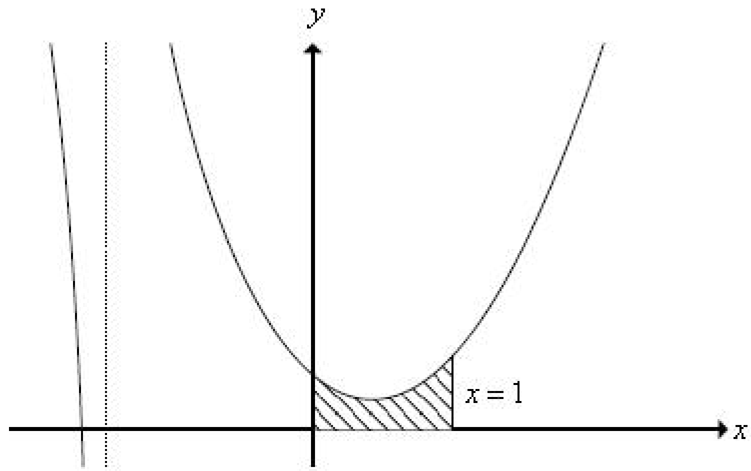
$$=(\overline{cis(n\sim)})=\overline{(cis\sim)^n}=\overline{z^n}$$

$$\boxed{(\bar{z})^n=\overline{z^n}}$$

הוכח!

4. ב.

להלן הציור המתאים :



לצורך חישוב השטח המבוקש נעבד את הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3+5x^2-6x+2+b}{2x+3}$

(נשים לב לתחום ההגדרה: $(x\neq-\frac{3}{2})$)

חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה,

לכן ניתן לחלק את הפולינומים לפני ביצוע האינטגרל.

$$\begin{array}{l} \underline{3x^2-2x} \\ 6x^3+5x^2-6x+2+b \;\big|\; 2x+3 \\ \underline{6x^3+9x^2} \\ = \quad -4x^2-6x+2+b \\ \qquad \underline{-4x^2-6x} \\ \qquad = \quad = \quad 2+b \end{array}$$

לכן ניתן לרשום את הפונקציה בתחום מפוצל

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+\frac{2+b}{2x+3} & x\neq-1.5 \\ \varnothing & x=-1.5 \end{cases}$$

נמצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר $x=1$ **ועל ידי הצירים ונשווה ל-** $2\ell n\frac{5}{3}$ **.**

$$S=\int_0^1(3x^2-2x+\frac{2+b}{2x+3})dx=$$

$$S=x^3-x^2+\frac{(2+b)\ell n|2x+3|}{2}]_0^1$$

$$S=(1^3-1^2+\frac{(2+b)\ell n|2\cdot 1+3|}{2})-(0^3-0^2+\frac{(2+b)\ell n|2\cdot 0+3|}{2})$$

$$S=\frac{(2+b)\ell n 5}{2}-\frac{(2+b)\ell n 3}{2}$$

$$S=\frac{(2+b)(\ell n 5-\ell n 3)}{2}$$

$$S=\frac{(2+b)(\ell n\frac{5}{3})}{2}$$

<u>**נמצא את הפרמטר**</u>:

$$2\ell n\frac{5}{3}=\frac{(2+b)(\ell n\frac{5}{3})}{2}$$

$$4=2+b$$

$$\boxed{b=2}$$

תשובה: $b=2$

5.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=mx^2-\ell n(2x)$

תחום הגדרה: $2x>0 \quad \rightarrow x>0$

תחום ההגדרה: $x>0$

ב. (1) נמצא את נגזרת הפונקציה:

$$\boxed{f(x)=mx^2-\ell n(2x)}$$

$$f'(x)=2mx-\frac{2}{2x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2mx^2-1}{x}}$$

נשווה הנגזרת לאפס

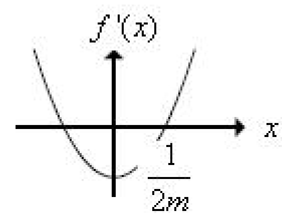
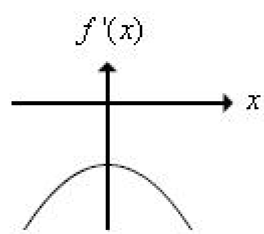
$$\frac{2mx^2-1}{x}=0$$

$$2mx^2=1$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2m}} \quad \leftarrow x>0$$

סימן הנגזרת נקבע בהתאם לערך של m **(המכנה חיובי, בהתאם לתחום ההגדרה)**

הגרפים הבאים הם של המונה בלבד

$m>0$	$m<0$	$m=0$
גרף הנגזרת **פרבולה בעלת מינימום**  **במקרה זה סימן הנגזרת משתנה משלילי לחיובי – ולפונקציה מינימום** **(הגרף רלוונטי בתחום ההגדרה)**	**סימן המונה שלילי** **בכל תחום ההגדרה**  **הפונקציה יורדת תמיד** **(הגרף רלוונטי בתחום ההגדרה)**	**במקרה זה** $f'(x)=-1$ **כלומר הנגזרת שלילית לכל** $x>0$ **והפונקציה יורדת בתחום ההגדרה**

(2) בהתאם לטבלה בסעיף הקודם $m\le 0$

ג.(1) נתון: $m=-0.5$ **.**

$$\boxed{f(x)=-0.5x^2-\ell n(2x)}$$

$$f'(x)=-x-\frac{2}{2x}$$

$$\boxed{f'(x)=-x-\frac{1}{x}}$$

הנגזרת שלילית לכל x **בתחום ההגדרה**

לכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה $x>0$

$$f''(x)=-1+\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-x^2+1}{x^2}}$$

$$f''(x)=0 \quad \rightarrow -x^2+1=0 \quad \rightarrow x^2=1$$

$$x=1 \quad \leftarrow x>0$$

$$y=-0.5\cdot 1^2-\ell n(2\cdot 1)=-1.193$$

(2) נמצא את תחומי קמירות/ קעירות בעזרת טבלה,

(מכנה הנגזרת השנייה חיובי) $f''(2)=-2^2+1<0$ $\quad$ $f''(0.5)=-0.5^2+1>0$

x	2	1	0.5	0
$f''(x)$	$+$	0	$-$	
מסקנה	$\cup$	**פיתול**	$\cap$	

תשובה: $(1,-1.193)$

(3)