נתונות שתי פונקציות $y=-x^2+3x-m$

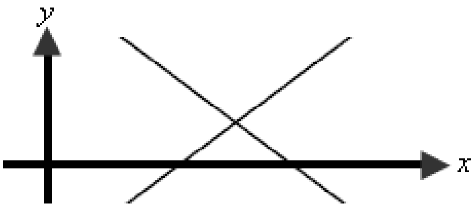
$y=(m-4)x^2+(2m-3)x-2m-1$

א. (1) לאילו ערכים של m הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בנקודה אחת בלבד ?

נשווה את הפונקציות ונמצא את התנאים הנדרשים ל"נקודה אחת בלבד ".

$$(m-4)x^2+(2m-3)x-2m-1=-x^2+3x-m$$
$$(m-4)x^2+x^2+(2m-3)x-3x-2m-1+m=0$$
$$mx^2-4x^2+x^2+2mx-3x-3x-m-1=0$$
$$mx^2-3x^2+2mx-6x-m-1=0$$
$$(m-3)x^2+2(m-3)x-(m+1)=0$$
$$a=m-3,\quad b=2(m-3),\quad c=-(m+1)$$

<u>מקרה הישר (משוואה ממעלה ראשונה)</u>



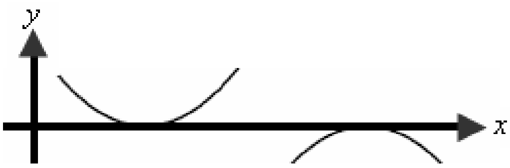
התנאים הנדרשים על מנת שתהייה נקודת חיתוך אחת

$b\neq 0,\quad c\neq 0$ **,** $a=0$

$a=0\quad \rightarrow m=3$ **ואם נציב** $m=3$ **נקבל** $b=0$**,** $c=-4$

כלומר $-4=0$ **ואין פתרון , לכן:** $m\neq 3$ **.**

<u>מקרה הפרבולה (משוואה ממעלה שנייה)</u>

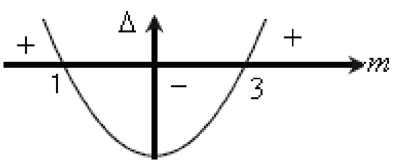


התנאים הנדרשים על מנת שתהייה נקודת חיתוך אחת:

$a\neq 0,\quad \Delta=0$

עבור $a\neq 0$ **נקבל** $m\neq 3$

$\Delta=0$ **(חיתוך אחד עם ציר ה- x)**



$$\Delta=b^2-4ac=0$$
$$4(m-3)^2+4\cdot(m-3)(m+1)=0$$
$$4(m-3)(m-3+m+1)\backslash 0$$
$$4(m-3)(2m-2)=0$$
$$m=3,\quad m=1$$

חיתוך של שני התנאים גם יחד: $m=1$

תשובה: $m=1$

(2) עבור $m=1$ **הפונקציות הן:** $y=-x^2+3x-1$ **ו-** $y=-x^2-x-3$

את שיעור ה- x של נקודת החיתוך נקבל באמצעות נוסחת הקדקוד של המשוואה שהתקבלה

$x_k=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-2(m-3)}{2(m-3)}=-1$ **. את שיעור ה- y של נקודת החיתוך, ע"י הצבה:** $y=-(-1)^2+3(-1)-1=-5$

תשובה: נקודת החיתוך היא $(-1,-5)$ **.**

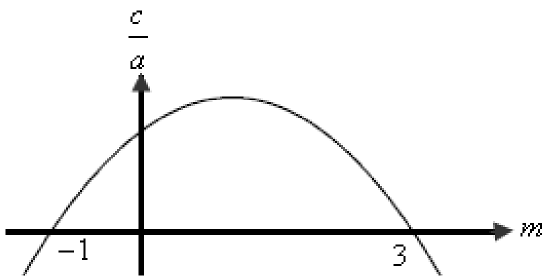
ב. יש למצוא לאילו ערכים של m הפרבולה חותכת את ציר ה-x בשתי נקודות שונות, הנמצאות מאותו צד של ציר ה- y .

התנאים הנדרשים: $\Delta > 0$, $\frac{c}{a} > 0$, (למעשה גם $a \neq 0$ שיהיה אוטומטית נכון עקב השימוש ב- $\frac{c}{a} > 0$)

$\Delta > 0$ (שני פתרונות שונים)

ע"פ הציור בסעיף א' (1) $m > 3$ או $m < -1$

$\frac{c}{a} > 0$ (שורשים שווי סימן)

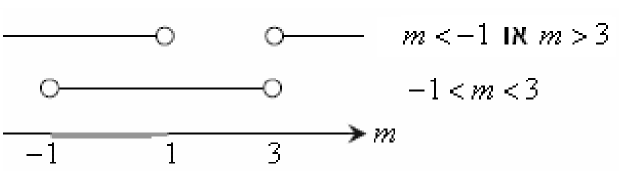


$$\frac{-(m+1)}{m-3} > 0 \quad / (m-3)^2$$
$$-(m+1)(m-3) > 0$$

ובהתאם לסקיצה משמאל: $-1 < m < 3$

חיתוך של שני התנאים גם יחד:

$-1 < m < 1$



תשובה: $-1 < m < 1$

א. לפנינו שלוש סדרות חשבוניות: (נרשום בטבלה את המאפיינים ונוכיח בהמשך)

סדרת האיברים שנמחקו	סדרת המקומות	סדרה מקורית	
$a_3 = a_1 + 2d$	3	a_1	a_1
$5d$	5	d	d
50	50	250	n

נשתמש בנוסחת האיבר הכללי: $a_n = a_1 + (n-1)d$

עבור סדרת המקומות $3, 8, 13, 18, ..., 248$

$$248 = 3 + 5(n-1)$$
$$245 = 5(n-1)$$
$$49 = n-1$$
$$\boxed{n = 50}$$

תשובה: נמחקו 50 **איברים.**

ב. נוכיח שסדרת האיברים שנמחקו היא חשבונית ונמצא את ההפרש שלה .

$$a^*_{n+5} - a^*_n = a_n + 5d - a_n = 5d$$

לכן, סדרת האיברים שנמחקו היא חשבונית ומנתה $5d$**.**

תשובה: $5d$

ג. נתון: $2a_1 + 249d = k$ **וניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית, עבור** $S_{250} = 13,000$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$$

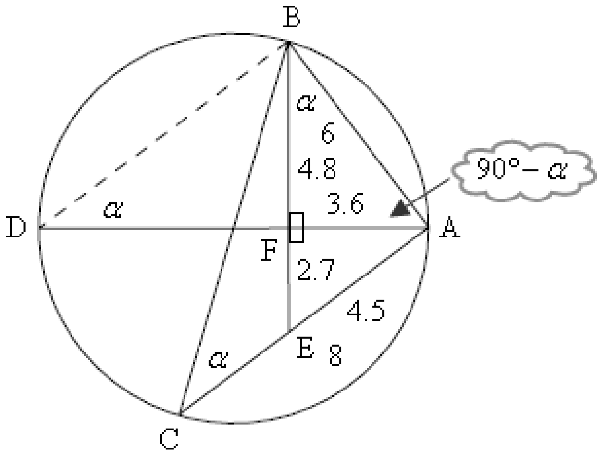
$$13,000 = \frac{250}{2}(2a_1 + d\cdot(250-1)) \quad /\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 13,000 = 125(2a_1 + 249d) \quad /:125$$
$$\Leftrightarrow 104 = 2a_1 + 249d$$
$$\Leftrightarrow \boxed{k = 104}$$

תשובה: $k = 104$

ד. נמצא את הסכום של האיברים שנמחקו:

$$S_{50} = \frac{50}{2}(2(a_1 + 2d) + 5d(50-1))$$
$$S_{50} = 25(2a_1 + 4d + 245d)$$
$$S_{50} = 25(2a_1 + 249d)$$
$$S_{50} = 25 \cdot 104$$
$$\boxed{S_{50} = 2,600}$$

תשובה: סכום האיברים שנמחקו $2,600$ **.**



<u>נתונים</u>

1. AD **הוא קוטר**

2. $AD \perp BE$

עבור ב.

3. $AC =$ **8 ס"מ**

4. $AB =$ **6 ס"מ**

5. $AF =$ **3.6 ס"מ**

צ"ל:

א. $\Delta AEB \sim \Delta ABC$

ב. (1) AE **(2)** BE

הסבר		טענה	נימוק
	6	$\angle C = \angle BDA = \alpha$	זוויות היקפיות שוות, נשענות על קשת $\overset{\frown}{AB}$
1	7	AD הוא קוטר	נתון
7	8	$\angle DBA = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
8 ,6	9	$\angle BAD = 90° - \alpha$	סכום זוויות ב- ΔABD הוא $180°$
2	10	$AD \perp BE$	נתון
10 ,9	11	$\angle ABE = \alpha$	סכום זוויות ב- ΔABF הוא $180°$
11 ,6	12	$\angle C = \angle ABF$ (ז)	כלל המעבר
	13	$\angle BAE = \angle BAC$ (ז)	זווית משותפת
13 ,12	14	$\Delta AEB \sim \Delta ABC$	משפט דמיון (ז. ז.)
		מ.ש.ל א	
14	15	$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{BC}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
3	16	$AC =$ 8 ס"מ	נתון
4	17	$AB =$ 6 ס"מ	נתון
17 ,16 ,15	18	$\frac{AE}{6} = \frac{6}{8}$	הצבה
18	19	$AE =$ 4.5 ס"מ	חישוב
5	20	$AF =$ 3.6 ס"מ	נתון
17 ,20 ,10	21	$BF =$ 4.8 ס"מ	משפט פיתגורס ΔABF
19 ,20 ,10	21	$EF =$ 2.7 ס"מ	משפט פיתגורס ΔAEF
21 ,20	23	$BE =$ 7.5 ס"מ	סכום קטעים
		מ.ש.ל. ב	

נתונים

1. $ABCD$ **טרפז** $(AB \parallel DC)$

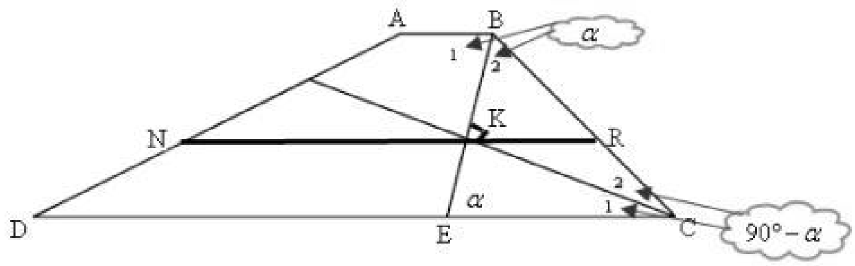
2. $\angle B_1 = \angle B_2 = \frac{\angle ABC}{2}$

3. $\angle C_1 = \angle C_2 = \frac{\angle BCE}{2}$

עבור ב. 4. $NKR \parallel DC$

עבור ג. 5. $BC = 6$ **ס"מ**

6. $AB = 2$ **ס"מ** **7.** $DE = 8$ **ס"מ**



צ"ל: א. $\angle BKC = 90°$ **ב.** NR **קטע אמצעים בטרפז** $ABCD$

ג. אורך קטע האמצעים בטרפז

הסבר		טענה	נימוק
2	8	$\angle B_1 = \angle B_2 = a$	נתון + סימון
8	9	$\angle ABC = 2a$	סכום זוויות
1	10	$AB \parallel DC$	נתון
9, 10	11	$\angle BCD = 180° - 2a$	זוויות חד צדדיות בין מקבילים משלימות ל- $180°$
3, 11	12	$\angle C_1 = \angle C_2 = 90° - a$	נתון + חישוב
8, 12	13	$\angle BKC = 90°$	סכום זוויות ב- ΔBKC הוא $180°$
		מ.ש.ל א	
4	14	$NKR \parallel DC$	נתון
6, 11	15	$\angle BEC = a$	סכום זוויות ב- ΔBCE הוא $180°$
8, 15	16	$\angle BEC = \angle B_2$	כלל המעבר
16	17	$BC = EC$ ΔBCE מש"ש	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔBCE
12, 17	18	K אמצע BE	ח.ז. במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון
14, 18	19	KR קטע אמצעים ΔBCE	יוצא מאמצע צלע ומקביל לשלישית
19	20	R אמצע BC	קטע אמצעים חוצה את הצלעות
14, 20	21	NR קטע אמצעים בטרפז $ABCD$	יוצא מאמצע שוק ומקביל לבסיסים
		מ.ש.ל. ב	
5	22	$BC = 6$ ס"מ	נתון
17, 22	23	$EC = 6$ ס"מ	כלל המעבר
7	24	$DE = 8$ ס"מ	נתון
23, 24	25	$DC = 14$ ס"מ	סכום קטעים
6	26	$AB = 2$ ס"מ	נתון
10, 21, 25, 26	27	$NR = \frac{(AB+DC)}{2} = \frac{2+14}{2}$ $NR = 8$ ס"מ	קטע אמצעים שווה למחצית סכום בסיסי הטרפז

הסבר		טענה	נימוק
		מ.ש.ל. ג	

(1) נגדיר את ההסתברויות הבאות

$P(A)$ **- הסתברות לעבור בהצלחה את מבחן הקבלה**

$P(B)$ **- הסתברות לעבור את ההצלחה את הראיון**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(A) = 0.62 \quad \to P(\overline{A}) = 0.38$$

$$P(B/A) = 0.75 \quad \to P(\overline{B}/A) = 0.25$$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$0.75 = \frac{P(B \cap A)}{0.62}$$

$$P(B \cap A) = 0.465$$

תשובה: ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה בחברה היא 0.465 **.**

(2) נמצא את ההסתברות שלכול היותר אחד מהם יתקבל לעבודה,

כלומר ש- 0 **מועמדים או** 1 **מועמדים יתקבל לעבודה.**

ההסתברות ל- 0 **מועמדים מתקבלים, או** 5 **לא מתקבלים -** $0.044 = (1-0.465)^5$

נחשב תחילה באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברות למאורע של:

"1 **מ-** 5 **המועמדים יתקבל לעבודה**

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $p = 0.465 \ , \ n = 5 \ , \ k = 1$

$$P_5(1) = \binom{5}{1}(0.465)^1(1-0.465)^{5-1} = 5 \cdot 0.465^1 \cdot 0.535^4 = 0.1905$$

ובהתאם: $0.044 + 0.1905 = 0.2345$

תשובה: ההסתברות שלכל היותר אחד המועמדים יתקבל לעבודה היא 0.2345 **.**

(3)

$$P(\text{יתקבל 1 מ- 5 בדיוק} \ / \ \text{התקבל 1 לכל היותר}) = \frac{P(\text{יתקבל 1 מ- 5 בדיוק} \cap \text{התקבל 1 לכל היותר})}{P(\text{התקבל 1 לכל היותר})}$$

$$= \frac{0.1905}{0.2345} = 0.812$$

תשובה: ההסתברות היא 0.812

ב. ההסתברות למאורע "לפחות 1 **מ-** 4 **יעברו בהצלחה את הראיון",**

היא המאורע המשלים ל" 0 **מ-** 4 **יעברו בהצלחה את הראיון", כלומר** $0.25^4 = 0.0039$

לכן ההסתברות המבוקשת היא $1 - 0.0039 = 0.9961$

תשובה: ההסתברות היא 0.9961

א. נשאל נאיבי, וכאלה הם רוב הנשאלים, ייטען שסביר יותר שירון הוא רואה חשבון ונגן ג'ז,
שכן עיסוקים אלו קשורים ללימודים אותם למד בתיכון, על פי מנגנון היציגות (הדמיון לתיאור, שנתפס כמאבחן).
אולם, על פי כללי ההסתברות $P(A \cap B) \le P(A), P(B)$ **,**
כלומר ההסתברות של חיתוך שני מאורעות קטנה (או שווה) מההסתברות של כל אחד מהם.
הנשאלים הנאיביים טועים, וטעות זו מכונה "כשל הצירוף".

ב. נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - **קבוצת המשתתפים בכנס** A **- קבוצת רואי החשבון**

$\overline{A}$ **- קבוצת נגני הג'ז** D **- קבוצת המתאימים לתיאור של ירון**
(התיאור של אבחנת המקצוע שיש לבחון את אמינותו)

$\overline{D}$ **- קבוצת הלא מתאימים לתיאור של ירון**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$$

הדיאגנוסטיות של עיסוק כרואה חשבון, של מי שמתואר כירון היא: $\frac{P(D/A)}{P(D/\overline{A})} = 12$

(1) נמצא את השיעור הבסיסי $\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

נמצא את היחס המעודכן $R = 12 \cdot 2 = 24$

ובהתאם: $P(A/D) = \frac{R}{1+R} = \frac{24}{25} = 0.96$

תשובה: ההסתברות, שמשתתף שמתאים לתיאור של ירון הוא רואה חשבון, היא 0.96 **.**

(2) על-מנת שההסתברות שהמשתתף שמתאים לתיאור של ירון יהיה נגן ג'ז תהייה גדולה מ- 0.5 **,**
נדרש שהיחס המעודכן יהיה קטן מ- 1 **(כאשר הדיאגנוסטיות אינה משתנה)**

$$R = \frac{P(D/A)}{P(D/\overline{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\overline{A})} < 1$$

$$12 \cdot \frac{P(A)}{P(\overline{A})} < 1 \quad \rightarrow 12 \cdot \frac{P(A)}{1 - P(A)} < 1 \quad \rightarrow 12P(A) < 1 - P(A)$$

$$13P(A) < 1 \quad \rightarrow P(A) < \frac{1}{12}$$

$$\frac{N(A)}{N(S)} < \frac{1}{12} \quad \rightarrow N(A) < \frac{60}{12} = 5$$

תשובה: מספר רואי החשבון שצריכים להיות הכנס הוא לכל היותר 4 **.**