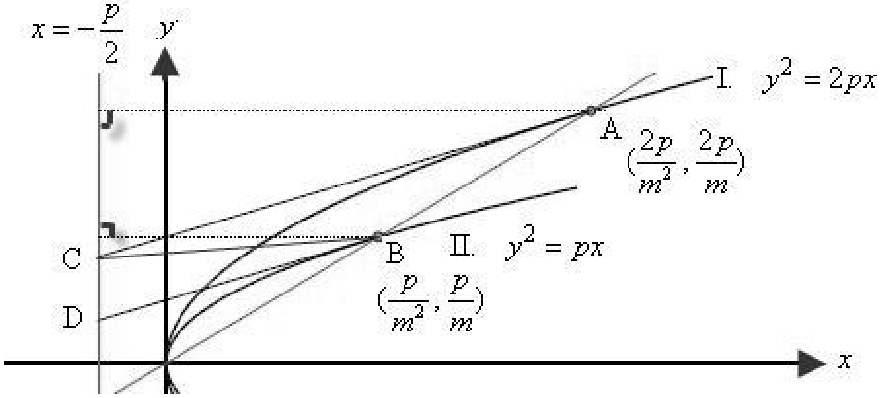
א. ישר $y = mx$ **(**$m > 0$**) חותך את הפרבולה** $y^2 = 2px$ I. **(**$p > 0$**) בנקודה** A -



נמצא את שיעורי הנקודה (שאינה בראשית הצירים):

$$m^2x^2 = 2px \quad / \frac{x}{m^2} > 0$$

$$x = \frac{2p}{m^2} \quad \rightarrow y = \frac{2p}{m}$$

$$\boxed{A(\frac{2p}{m^2}, \frac{2p}{m})}$$

על פי הנוסחאון: משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$ **:** $yy_0 = p(x + x_0)$

ובהתאם השיפוע $m = \frac{p}{y_0}$**, לכן:** $m_A^I = \frac{p}{\frac{2p}{m}} = 0.5m$

ישר $y = mx$ **(**$m > 0$**) חותך את הפרבולה** $y^2 = px$ II. **(**$p > 0$**) בנקודה** B -

נמצא את שיעורי הנקודה (שאינה בראשית הצירים):

$$m^2x^2 = px \quad / \frac{x}{m^2} > 0$$

$$x = \frac{p}{m^2} \quad \rightarrow y = \frac{p}{m}$$

$$\boxed{B(\frac{p}{m^2}, \frac{p}{m})}$$

ובהתאם: $m_B^{II} = \frac{0.5p}{\frac{p}{m}} = 0.5m$

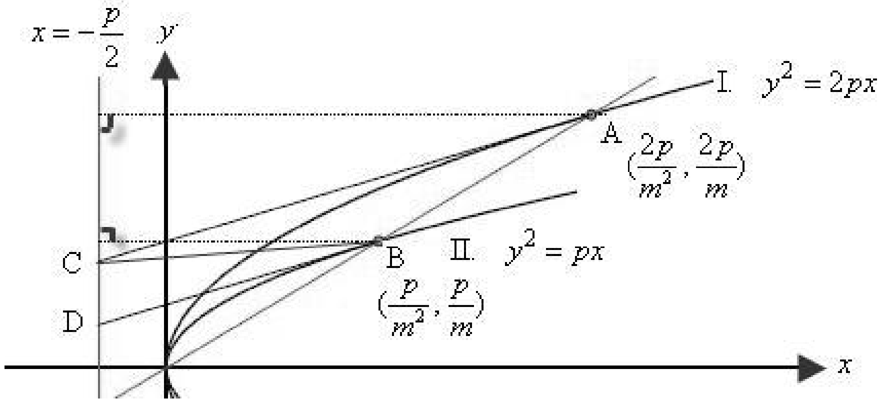
לכן שיפועי המשיקים שווים.

כיוון שנקודות ההשקה נמצאות על הישר $y = mx$ **, ששיפועו** m **שונה משיפועי המשיקים –**

הרי שהמשיקים מקבילים זה לזה (ואינם מתלכדים).

הוכח !

ב. נתון כי היחס בין שטח המשולש DCA **לשטח המשולש** DCB **הוא** 1.5**.**



לשני המשולשים צלע משותפת CD **, המונחת על המדריך** $x=-\frac{p}{2}$ **, המקביל לציר ה-** y **.**

כאשר הגובה שלה יהיה מקביל לציר ה- x **, לכן יחס השטחים יהיה כיחס** $\dfrac{x_A-(-\frac{p}{2})}{x_B-(-\frac{p}{2})}$

$$1.5=\frac{\frac{2p}{m^2}+\frac{p}{2}}{\frac{p}{m^2}+\frac{p}{2}} \quad / m^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1.5=\frac{4p+pm^2}{2p+pm^2} \quad / p\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1.5(2+m^2)=4+m^2$$

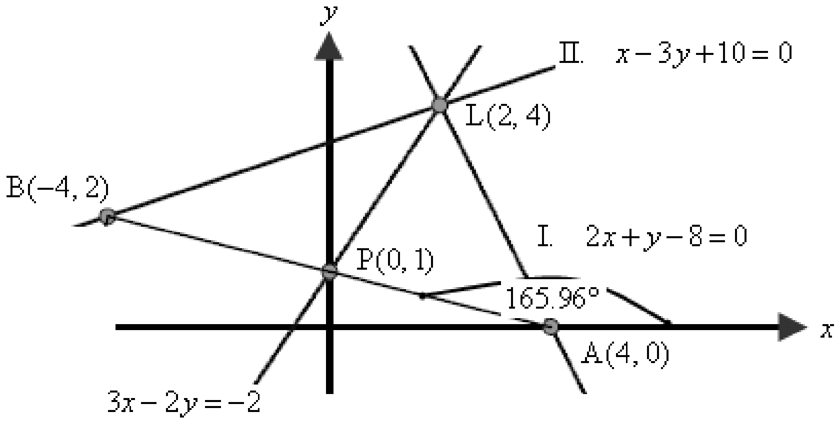
$$\Leftrightarrow 0.5m^2=1$$

$$\Leftrightarrow m^2=2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m=\sqrt{2}} \quad \leftarrow m>0$$

תשובה: $m=\sqrt{2}$ **.**

א. הישר $2x+y-8=0$ .I **והישר** $x-3y+10=0$ .II **נפגשים בנקודה** L



נמצא את שיעורי הנקודה L :

$$\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-3y=-10 \quad / \cdot(-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x+y=8 \\ -2x+6y=20 \quad / \cdot(-2) \end{cases}$$

$$7y=28 \quad \rightarrow y=4 \quad \rightarrow x=2$$

$$\boxed{\mathrm{L}(2,4)}$$

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת הישר $(2+k)x-2y-8+10k=0$

$$(2+k)\cdot 2-2\cdot 4-8+10k=0 \quad \rightarrow 4+2k-16+10k=0 \quad \rightarrow k=1$$

ובהתאם משוואת הישר, החותך את ציר ה- y **בנקודה** P **:** $3x-2y=-2$

אם נציב $x=0$ **נקבל ששיעורי הנקודה** $\boxed{\mathrm{P}(0,1)}$

A **נמצאת על הישר** $2x+y-8=0$ .I **ובהתאם:** $\mathrm{A}(t, 8-2t)$

P **היא אמצע הקטע** AB **, לכן:**

$$\left.\begin{array}{l} 0=\dfrac{t+x_{\mathrm{B}}}{2} \quad \rightarrow x_{\mathrm{B}}=-t \\ 1=\dfrac{8-2t+y_{\mathrm{B}}}{2} \quad \rightarrow y_{\mathrm{B}}=2t-6 \end{array}\right\} \mathrm{B}(-t, 2t-6)$$

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת הישר $x-3y+10=0$ .II

$$-t-3\cdot(2t-6)+10=0$$
$$-t-6t+18+10=0 \quad \rightarrow t=4$$

אם נציב $t=4$ **נקבל ששיעורי הנקודות** $\boxed{\mathrm{B}(-4,2)}$, $\boxed{\mathrm{A}(4,0)}$

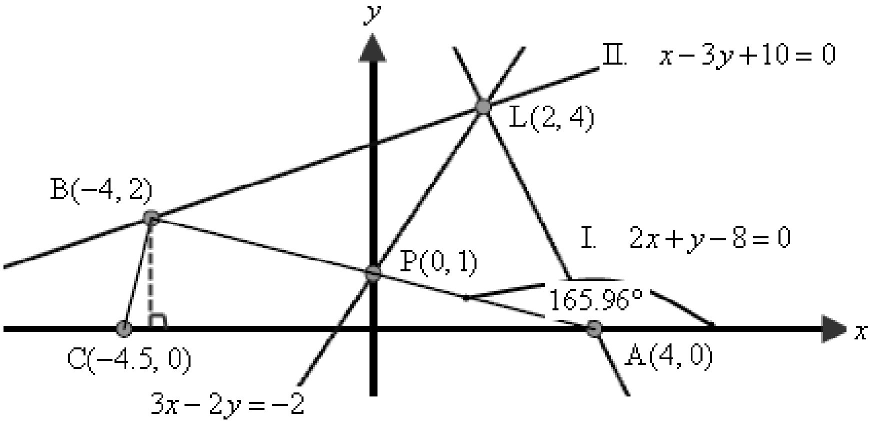
נמצא את שיפוע הישר העובר בנקודות A **,** P **ו-** B **ובהתאם את הזווית המבוקשת:**

$$m_{\mathrm{AB}}=\frac{2-0}{-4-4}=-\frac{1}{4} \quad \rightarrow a=165.96^\circ$$

תשובה: 165.96°.

ב. דרך הנקודה B **עובר ישר. ישר זה חותך את ציר ה-** x **בנקודה** C**, ושיפועו חיובי.**

שטח המשולש ABC **הוא** 8.5**.**



נמצא את שיעורי הנקודה C **:**

$$8.5=\frac{AC\cdot y_B}{2}$$
$$17=(4-x_C)\cdot 2$$
$$x_C=-4.5$$
$$\boxed{C(-4.5,0)}$$

נמצא את שיפוע הישר העובר בנקודות B **ו-** C **על מנת לראות האם מקיים את תנאי הניצבות לקוטר:**

$$m_{BC}=\frac{2-0}{-4-(-4.5)}=\frac{2}{0.5}=4$$
$$\rightarrow m_{BC}\cdot m_{AB}=(-\frac{1}{4})\cdot 4=-1$$

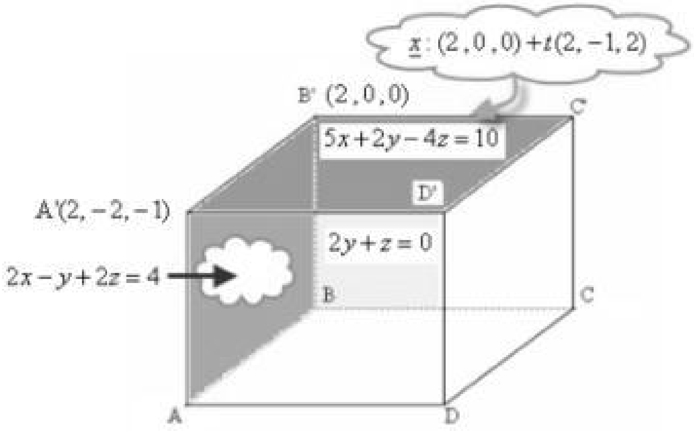
מכאן שהישר העובר בנקודות B **ו-** C **מאונך לקוטר.**

תשובה: הישר BC **משיק למעגל זה.**

א. נציב את שיעורי הקדקוד A' $(2,-2,z)$ **במשוואת הפאה** $A'B'BA$ **:** $2x-y+2z=4$

$$2\cdot 2-(-2)+2z=4 \quad \to 2z=-2 \quad \to z=-1$$

ובהתאם: $A'(2,-2,-1)$



המישור $A'B'C'D'$ **מאונך לשני המישורים הנתונים,** $2x-y+2z=4$ **ו-** $2y+z=0$

ולכן וקטורי המקדמים שלהם פורשים את המישור $A'B'C'D'$ **, עם** $(-1$ $A'(2,-2,$.

נמצא את משוואת המישור, שההצגה הפרמטרית שלו: $\pi:\underline{x}=(2,-2,-1)+t(2,-1,2)+s(0,2,1)$

נציב במשוואת המישור שלוש נקודות, שאינן על ישר אחד:

$$ax+by+cz+d=0$$

$$(1)\quad 2a-2b-c+d=0 \quad t=0, s=0$$

$$(2)\quad 4a-3b+c+d=0 \quad t=1, s=0$$

$$(3)\quad 2a+d=0 \qquad t=0, s=1$$

$$(3)\to d=-2a,\quad (1)\to c=-2b,\quad (2)\to 4a-3b-2b-2a=0\to 2a=5b$$

$$b=2,\quad a=5,\quad \to d=-10,\quad c=-4$$

$$\boxed{p:5x+2y-4z=10}$$

תשובה: משוואת המישור של הפאה $A'B'C'D'$ **היא** $5x+2y-4z=10$**.**

ב. 1) הקדקוד B' **הוא מפגש שלושת הפאות שמשוואותיהם נתונות: נציב** $(2,0,0)$ **במשוואות:**

משוואת הפאה $A'B'BA$ **:** $2\cdot 2-0+20=4\to 4=4 \quad o.k.$

משוואת הפאה $B'C'CB$ **:** $2\cdot 0+0=0\to 0=0 \quad o.k.$

משוואת הפאה $A'B'C'D'$ **:** $5\cdot 2+2\cdot 0+2\cdot 0=10\to 10=10 \quad o.k.$

לכן שיעורי הקדקוד B' **הם** $(2,0,0)$.

(2) הישר $B'C'$ **משיק למעגל, שכן הוא מאונך לרדיוס** $A'B'$ **בנקודה** B' **שעל המעגל.**

כיוון שהוא מאונך לפאה $A'B'BA$ **, הרי שווקטור הכיוון שלו הוא** $\underline{x}:(2,-1,2)$

ובהתאם הצגה פרמטרית אפשרית של המשיק היא: $\underline{x}:(2,0,0)+t(2,-1,2)$

תשובה: $\underline{x}:(2,0,0)+t(2,-1,2)$

יש לפתור את המשוואה

$$2\ln 2+(1+\frac{1}{2x})\ln 3=\ln(3^{\frac{1}{x}}+27)$$

תחום ההגדרה: $x\neq 0$

$$2\ln 2+(1+\frac{1}{2x})\ln 3=\ln(3^{\frac{1}{x}}+27)$$

$$\ln 2^2+\ln 3^{1+\frac{1}{2x}}=\ln(3^{\frac{1}{x}}+27)\quad\leftarrow b\log_a x=\log_a x^b$$

$$\ln(4\cdot 3^{1+\frac{1}{2x}})=\ln(3^{\frac{1}{x}}+27)\quad\leftarrow \log_a x+\log_a y=\log_a xy$$

$$4\cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}=3^{\frac{1}{x}}+27$$

$$12\cdot 3^{\frac{1}{2x}}=3^{\frac{1}{x}}+27$$

$$t^2-12t+27=0\quad\leftarrow \boxed{3^{\frac{1}{2x}}=t}$$

$$t_{1,2}=\frac{12\pm 6}{2}$$

$t=9$ | $t=3$

$3^{\frac{1}{2x}}=9$ | $3^{\frac{1}{2x}}=3$

$\frac{1}{2x}=2$ | $\frac{1}{2x}=1$

$\boxed{x=0.25}$ | $\boxed{x=0.5}$

תשובה: $x=0.25$, $x=0.5$

(1) נתונה המשוואה: $(mi+4)z^2+(m-4i)z-2=0$ **ויש למצוא לאילו ערכי** m **יש פתרון יחיד**

<u>מקרה הקו הישר</u>

תנאים נדרשים: $a=0$ **,** $b\neq 0$

עבור $a=0$ **נקבל :** $mi+4=0 \quad \to m=\frac{-4}{i}=\frac{-4(-i)}{i(-i)}=4i$

אולם במקרה זה, לאחר הצבה במשוואה המקורית, נקבל $b=0$ **, שכן** $4i-4i=0$

כלומר הקו הישר לא נותן פתרון יחיד (למעשה, בקו ישר "אין פתרון", שכן מקבלים $-2=0$**)**

<u>מקרה הפרבולה</u>

תנאים נדרשים: $a\neq 0$ **,** $\Delta=0$

עבור $a\neq 0$ **נקבל :** $m\neq 4i$

עבור $\Delta=0$ **נקבל:**

$$(m-4i)^2+8(mi+4)=0$$
$$m^2-8mi-16+8mi+32=0$$
$$m^2=-16$$
$$\boxed{m=-4i}$$

תשובה: $m=-4i$

(2) נציב $m=-4i$ **במשוואה הנתונה :**

$$((-4i)i+4)z^2+(-4i-4i)z-2=0$$
$$8z^2-8iz-2=0$$

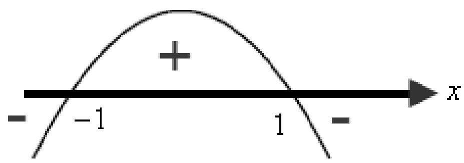
הפתרון היחיד מתקבל בקדקוד הפרבולה המתאימה: $z_k=\frac{8i}{16}=0.5i$

תשובה: $z=0.5i$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה

$$\frac{1-x}{1+x}>0 \quad /(1+x)^2$$
$$(1-x)(1+x)>0$$



ובהתאם: $-1<x<1$

תשובה: $-1<x<1$

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה :

$$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{-2}{(1+x)(1-x)}}$$

מכאן שהנגזרת שלילית בתחום ההגדרה ($-1<x<1$**) ואין נקודות קיצון**

תשובה: הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה ואין נקודות קיצון.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה

$x^2-1\neq 0 \quad \to x\neq \pm 1$ **והישרים** $x=\pm 1$ **מהווים אסימפטוטות אנכיות לגרף הפונקציה.**

נמצא נקודת קיצון:

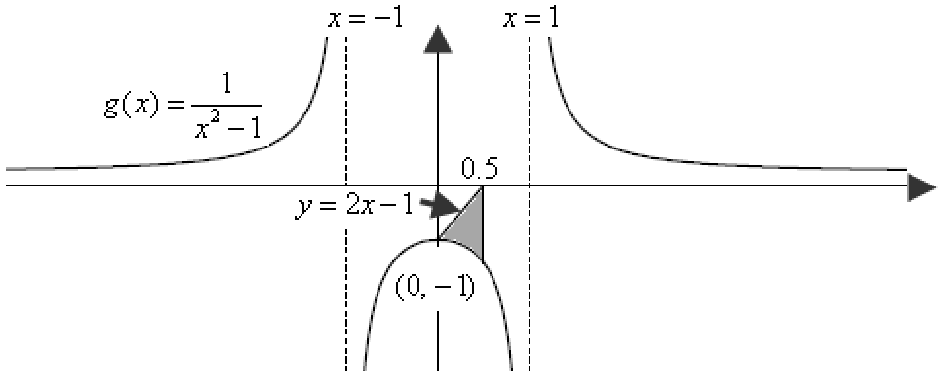
$$g(x)=\frac{1}{x^2-1}$$
$$\boxed{g'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}}$$

עבור $x=0$ **נקבל שהנגזרת מתאפסת, תוך כדי מעבר מחיוביות לשליליות,**

כלומר הפונקציה עוברת מעלייה לירידה – כאשר $(0,-1)$ **נקודת מקסימום.**

תשובה: $(0,-1)$ **נקודת מקסימום**

(2) נביא את סרטוט גרף הפונקציה, לרבות סרטוט $y=2x-1$ **בתחום שבין** $(0,-1)$ **ל** $x=\frac{1}{2}$ **:**



ג. בסעיף א (2) קבלנו $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$ $\rightarrow$ $f'(x)=\frac{-2}{(1+x)(1-x)}$

מכאן ש: $\int(\frac{1}{x^2-1})dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}+c$

$$S=\int_0^{0.5}(2x-1-\frac{1}{x^2-1})\,dx$$

$$S=(\frac{2x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x})\Big]_0^{0.5}$$

$$S=(0.5^2-0.5-\frac{1}{2}\ln\frac{1-0.5}{1+0.5})-(0^2-0-\frac{1}{2}\ln\frac{1-0}{1+0})$$

$$S=(0.25-0.5-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3})-(0)$$

$$S=-0.25+0.5\ln(\frac{1}{3})^{-1}$$

$$S=\boxed{0.5\ln 3-0.25}$$

תשובה: $0.5\ln 3-0.25$ **.**