א. נסמן ב- x את מהירות רוכב האופנים (קמ"ש), ובהתאם $0.6x$ בחלק השני של רכיבתו.

נסמן ב- y את זמן נסיעת הרוכב עד לפגישה עם המכונית (שעות),

ובהתאם $y-1.5$ זמן נסיעת המכונית, ו- $7-y$ זמן נסיעת הרוכב לאחר הפגישה.

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מכונית מ- B עד לפגישה	$y-1.5$	60	$60(y-1.5)$
רוכב מ- A עד לפגישה	y	x	xy
רוכב מהפגישה עד ל- B	$7-y$	$0.6x$	$0.6x(7-y)$

הרוכב והמכונית עברו ביחד את כל הדרך שבין הנקודות, שהמרחק ביניהן הוא 50 ק"מ.

המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $x(y-1.5)+xy=50$

הרוכב, בשני חלקי הרכיבה, עבר את כל הדרך

המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $xy+0.6x(7-y)=50$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases}60(y-1.5)+xy=50\\ xy+0.6x(7-y)=50\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy+60y=140 & /\cdot(-0.4)\\ 0.4xy+4.2x=50\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-0.4xy-24y=-56\\ 0.4xy+4.2x=50\end{cases}$$

$$-24y+4.2x=-6 \quad /:(-24)$$

$$y-0.175x=0.25$$

$$\boxed{y=0.175x+0.25}$$

$$x(0.175x+0.25)+60(0.175x+0.25)=140$$

$$0.175x^2+10.75x-125=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-10.75\pm14.25}{0.35}$$

$$\boxed{x_1=10} \rightarrow \boxed{y=2}$$

$$\cancel{x_2=-42}$$

הפתרון השני נפסל, כי הוא שלילי ומהירות הרכיבה חיובית.

תשובה: רוכב האופנים פגש את המכונית בשעה 10^{00} (2 שעות לאחר שיצאה, במהירות 10 קמ"ש)

יש להוכיח כי לכל n טבעי זוגי, כאשר מחלקים 4^n+5 ב- 15 , השארית היא 6.

כלומר, יש להוכיח כי 4^n+5-6 מתחלק ב- 15 <u>ללא שארית</u>, לכל n טבעי זוגי.

ואם נפשט: צ"ל $\frac{4^n-1}{15}$ מתחלק ב- 15 <u>ללא שארית</u>, לכל n טבעי זוגי

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$

$$\frac{4^2-1}{15}=\frac{15}{15}=1$$

לכן הטענה נכונה עבור $n=2$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

כלומר: $\frac{4^k-1}{15}$ שלם

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$, לכן צ"ל $\frac{4^{k+2}-1}{15}$ שלם

$$\frac{4^{k+2}-1}{15}=$$

$$=\frac{16\cdot 4^k-1}{15}=$$

$$=\frac{4^k-1}{15}+\frac{\cancel{15}\cdot 4^k}{\cancel{15}}$$

$$=\frac{4^k-1}{15}+4^k$$

המחובר השמאלי שלם , על-פי הנחת האינדוקציה,

המחובר הימני שלם - כי בסיס החזקה שלם והמעריך טבעי,

לכן הביטוי $\frac{4^{k+2}-1}{15}$ שלם

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי זוגי,

אז היא נכונה עבור $n=k+2$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי זוגי.

ובהתאם - כאשר מחלקים 4^n+5 ב- 15 , השארית היא 6.

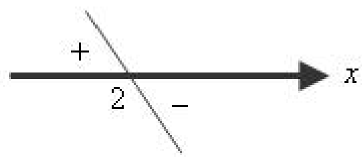
יש לפתור את האי-שוויון: $|2-x|-2|x+4|>3$

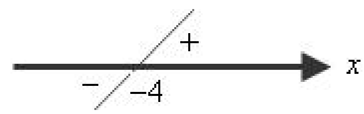
נבדוק מתי מתאפס כל ביטוי שבערך מוחלט,

וצייר את הגרף המתאים – שייראה את סימני הביטוי שבתוך הערך המוחלט.

$2-x=0$ $x+4=0$

$x=2$ $x=-4$





עתה נחלק את ה- x **לתחומים, בהתאם לאפסים שקבלנו,**

ונפתור בהתאם את האי-שוויון $|2-x|-2|x+4|>3$ **:**

$x>2$	$-4\le x\le 2$	$x<-4$
$-2+x$ $x+4$	$2-x$ $x+4$	$2-x$ $-x-4$
$-2+x-2(x+4)>3$ $-2+x-2x-8>3$ $-x>13 \quad / :\cdot(-1)$ $x<-13$	$2-x-2(x+4)>3$ $2-x-2x-8>3$ $-3x>9 \quad / :\cdot(-3)$ $x<-3$	$2-x-2(-x-4)>3$ $2-x+2x+8>3$ $x>-7$
$x<-13 \quad \cap \quad x>2$ ¤	$x<-3 \quad \cap \quad -4\le x\le 2$ $\boxed{-4\le x<-3}$	$x>-7 \quad \cap \quad x<-4$ $\boxed{-7<x<-4}$

נאחד את הפתרונות ונקבל $-7<x<-3$

תשובה: $-7<x<-3$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+a}{1-x^2}$ **, כאשר** $a\neq\pm1$

תחום ההגדרה: $\boxed{x\neq\pm1}\ \rightarrow\ 1-x^2\neq0$

תשובה: $x\neq\pm1$

ב. נמצא את נגזרת הפונקציה

$$\boxed{f(x)=\frac{x+a}{1-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2+2x(x+a)}{(1-x^2)^2}$$

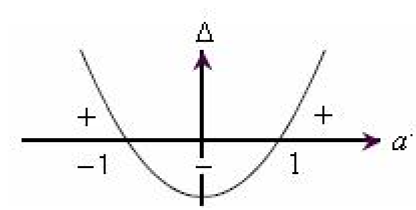
$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+2ax+1}{(1-x^2)^2}}$$

מכנה הנגזרת חיובי, ולכן ע"מ שהפונקציה תעלה בכל נקודה x **בתחום ההגדרה שלה,**

נדרש שלטרינום הריבועי במונה הנגזרת, $x^2+2ax+1$ **, תהייה דיסקרימיננטה שלילית,** $\Delta<0$ **,**

או $\Delta=0$ **– ואז תהייה נקודת פיתול, תוך כדי עלייה של הפונקציה (הנגזרת *לא* תחליף סימן).**

כך שנקבל פרבולה בעלת מינימום, שכולה חיובית (*ללא* חיתוך עם הצירים):



$$\underline{\Delta\le0}$$
$$4a^2-4\le0$$
$$a^2-1\le0$$

ולכן $-1<a<1$ **כי** $a\neq\pm1$**.**

תשובה: $-1<a<1$

ג. נתון: $0<a<1$ **(כלומר הפונקציה עולה בכל נקודה** x **בתחום ההגדרה שלה,** $x\neq\pm1$ **)**

(1) חיתוך ציר x **-** $y=0$

$$\frac{x+a}{1-x^2}=0$$
$$x+a=0$$
$$x=-a$$

ובהתאם: $(-a,0)$ **נקודות החיתוך עם ציר** x

חיתוך ציר y **-** $x=0$ **:** $y=\frac{0+a}{1-0^2}=a$

ובהתאם: $(0,a)$

תשובה: $(-a,0)$ **,** $(0,a)$

(2) האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+a}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1^2}=\frac{0}{-1}=0$ **, (או מעלת פולינום מונה** (1) **קטנה ממעלת פולינום מכנה** (2)**)**

לכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית**

$$\lim_{x\to1^+}=\frac{x+a}{1-x^2}=\frac{1+a}{1-1^2}=\frac{a+1}{0^-}=-\infty \quad \leftarrow 0<a<1$$

$$\lim_{x\to1^-}=\frac{x+a}{1-x^2}=\frac{1+a}{1-1^2}=\frac{a+1}{0^+}=\infty \quad \leftarrow 0<a<1$$

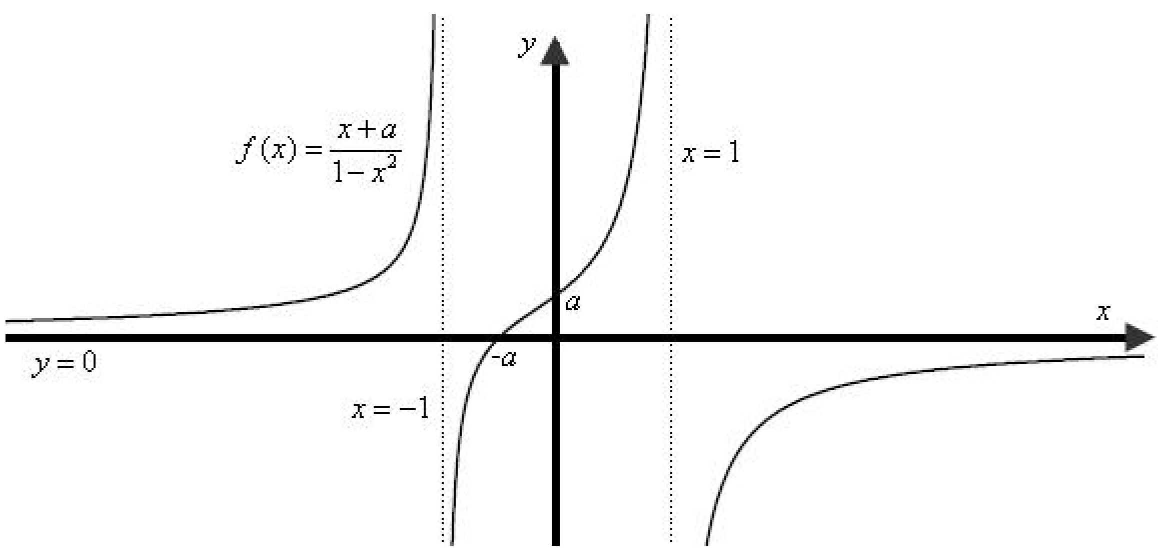
$$,\lim_{x\to-1^-}=\frac{x+a}{1-x^2}=\frac{-1+a}{1-(-1)^2}=\frac{a-1}{0^-}=\infty \quad \leftarrow 0<a<1$$

$$\lim_{x\to-1^+}=\frac{x+a}{1-x^2}=\frac{-1+a}{1-(-1)^2}=\frac{a-1}{0^+}=-\infty \quad \leftarrow 0<a<1$$

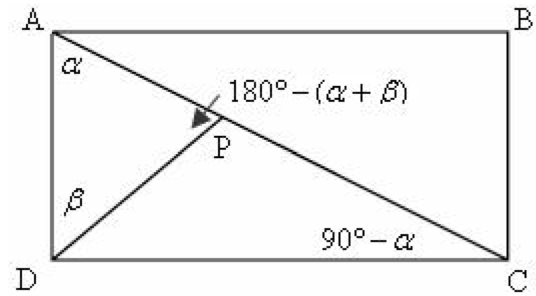
לכן $x=1$ **,** $x=-1$ **אסימפטוטות אנכית**

תשובה: $y=0$ **,** $x=1$ **,** $x=-1$

(3) ובהתאם סרטוט מתאים של גרף הפונקציה



א.



למשולש APD **ולמלבן-** ABCD **יש צלע משותפת** AD,

כאשר המעגל החוסם את המלבן חוסם גם את המשולש ADC

לכן היחס $\frac{r}{R}$ **שווה ליחס** $\frac{\sin\sphericalangle ACD}{\sin\sphericalangle APD}$ $\rightarrow \frac{r}{R}=\frac{\sin\sphericalangle ACD}{\sin\sphericalangle APD}$ $\frac{AD}{\sin\sphericalangle APD}=2r, \frac{AD}{\sin\sphericalangle ACD}=2R$

$$\frac{r}{R}=\frac{\sin(90^\circ-\sim)}{\sin(180^\circ-(\sim+\ \ ))}=\frac{\cos\sim}{\sin(\sim+\ \ )}$$

תשובה: $\frac{\cos\sim}{\sin(\sim+\ \ )}$

ב. אלכסון המלבן חוצה את שטח המלבן, לכן שטחו כפול משטח משולש ADC.

$$\frac{S_{\Delta APD}}{S_{\square ABCD}}=\frac{2r^2\sin\sim\sin\ \ \sin(180^\circ-(\sim+\ \ ))}{2\cdot 2R^2\sin\sim\sin 90^\circ\sin(90^\circ-\sim)}$$

$$\frac{S_{\Delta APD}}{S_{\square ABCD}}=\left(\frac{\cos\sim}{\sin(\sim+\ \ )}\right)^2\frac{\sin\ \ \sin(\sim+\ \ )}{2\cos\sim}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta APD}}{S_{\square ABCD}}=\frac{\cos\sim\sin}{2\sin(\sim+\ \ )}}$$

תשובה: $\frac{\cos\sim\sin}{\sin(\sim+\ \ )}$ $\frac{\cos\sim\sin}{2\sin(\sim+\ \ )}$

ג. נתון $\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\square ABCD}}=\frac{1}{4}$ **, כלומר** $\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{1}{2}$ **כיוון שאלכסון המלבן חוצה את שטח המלבן.**

בהתאם DP **הוא תיכון ליתר, שכן הוא חוצה את** ΔADC **לשני משולשים שווי שטח.**

כיוון שתיכון ליתר שווה למחצית היתר, הרי ש- ΔAPD **שווה שוקיים,**

ונקבל: $\ \ =\sim$.

נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x+\cos x$ **בתחום** $0\le x\le 2\pi$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

בשלבי הפתרון המשוואה נחלק ב- $\cos x$.

החילוק אפשרי, שכן אם $\cos x=0$ **אז** $\sin x=\pm 1$ **ונקבל פסוק שקר.**

$$0=\sin x+\cos x$$
$$-\cos x=\sin x \quad /:\cos x$$
$$\tan x=-1$$
$$\boxed{x=-\frac{\pi}{4}+\pi k}$$
$$k=1 \quad \to x=\frac{3\pi}{4} \quad \to (\frac{3\pi}{4},0)$$
$$k=1 \quad \to x=\frac{7\pi}{4} \quad \to (\frac{7\pi}{4},0)$$

בעזרת ערכי הפונקציה נוכל לדעת מתי הפונקציה חיובית ומתי שלילית

$$f(0)=\sin 0+\cos 0=1, \quad f(\pi)=\sin\pi+\cos\pi=-1$$

x	2π		$\frac{7\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{4}$		0
$f(x)$	1	+	0	−	0	+	1
מסקנה		**חיובית**		**שלילית**	**max**	**חיובית**	

נחשב את הנפח המבוקש:

$$v=\pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^2\,dx$$
$$v=\pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos)\,dx$$
$$v=\pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(1+\sin 2x)\,dx$$
$$v=\pi((x-0.5\cos 2x))\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}$$
$$v=\pi((\frac{7\pi}{4}-0.5\cos 2\cdot\frac{7\pi}{4})-(\frac{3\pi}{4}-0.5\cos 2\cdot\frac{3\pi}{4}))$$
$$v=\pi(\frac{7\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})$$
$$\boxed{v=\pi^2}$$

תשובה: π^2