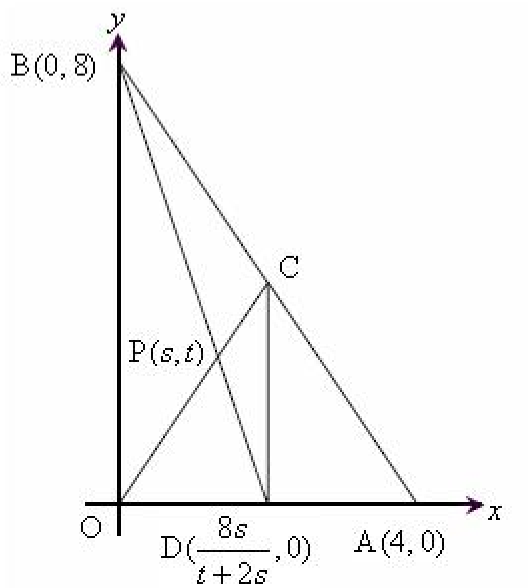
נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $P(s,t)$ - נקודה על המקום הגיאומטרי.

$$m_{OC} = m_{OP} = \frac{t-0}{s-0} = \frac{t}{s}$$

לכן משוואת OC העובר בראשית היא $y = \frac{t}{s}x$

$$m_{AB} = \frac{8-0}{0-4} = -2$$

ומשוואת AB $\quad y-0=-2(x-4) \quad \to y=-2x+8$

נמצא את שיעור ה- x של הנקודה C, נקודת החיתוך בין AB ל- OC

$$\begin{cases} y = \frac{t}{s}x \\ y = -2x+8 \end{cases}$$

$$\frac{t}{s}x = -2x+8$$

$$tx + 2sx = 8s$$

$$x_C = \frac{8s}{t+2s}$$

ובהתאם שיעורי הנקודה $D(\frac{8s}{t+2s}, 0)$, שממנה הועלה אנך לנקודה C

נמצא את משוואת BD

$$m_{BD}=\frac{8-0}{0-\frac{8s}{2s+t}}=-\frac{2s+t}{s}$$

$$y-8=-\frac{2s+t}{s}(x-0)$$

$$y=-\frac{2s+t}{s}x+8$$

$P(s,t)$ **נמצאת על** BD **ולכן מקיימת את המשוואה שלו:**

$$t=-\frac{2s+t}{s}s+8$$

$$t=-2s-t+8$$

$$2t=-2s+8$$

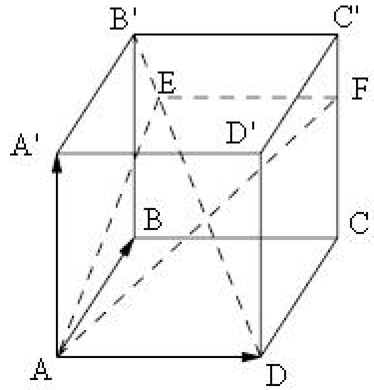
$$t=-s+4$$

ומשוואת המקום הגיאומטרי היא הישר $y=-x+4$

כיוון ש- D ***לא*** **מתלכדת עם קצות הקטע, אז** $0<x<4$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $y=-x+4$ **,** $0<x<4$

א. נצל את מאפייני הקובייה, שמקצועותיה שווים ומאונכים זה לזה



$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $|\underline{u}|=a$ $\underline{u}^2=a^2$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $|\underline{v}|=a$ $\underline{v}^2=a^2$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$ $|\underline{w}|=a$ $\underline{w}^2=a^2$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

$$\overrightarrow{DE}=t\overrightarrow{DB'}$$
$$\overrightarrow{DE}=t(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})$$
$$\overrightarrow{DE}=t(-\underline{v}+\underline{u}+\underline{w})$$
$$\boxed{\overrightarrow{DE}=t\underline{u}-t\underline{v}+t\underline{w}}$$
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{AE}=\underline{v}+t\underline{u}-t\underline{v}+t\underline{w}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AE}=t\underline{u}+(1-t)\underline{v}+t\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{AE}=t\underline{u}+(1-t)\underline{v}+t\underline{w}$

ב.

$$\overrightarrow{CF}=t\overrightarrow{CC'}$$
$$\boxed{\overrightarrow{CF}=t\underline{w}}$$
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$$
$$\overrightarrow{EF}=-t\underline{u}+t\underline{v}-t\underline{w}+\underline{u}+t\underline{w}$$
$$\boxed{\overrightarrow{EF}=(1-t)\underline{u}+t\underline{v}}$$

כיוון שהווקטור $\overrightarrow{EF}$ מובע ע"י שני הווקטורים הפורשים את הבסיס ABCD , הרי שהוא <u>מקביל לבסיס</u>.

<u>הערה משלימה</u>

הישר EF מקביל לבסיס או מתלכד עימו.

עבור $t=0$ הישר EF יתלכד עם הישר DC , במקרה זה הישר EF מוכל בבסיס ABCD .

עבור $t=1$ הישר EF יתלכד עם הישר B'C' , במקרה זה הישר EF מקביל לבסיס ABCD .

ג. אם האלכסון DB' **מאונך למישור** AEF **, אזי הוא מאונך לשני ישרים *לא* מקבילים למישור (משפט א')**

$$\overrightarrow{DB'} \perp \overrightarrow{EF} \quad \rightarrow \overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$
$$(-\underline{v} + \underline{u} + \underline{w}) \cdot ((1-t)\underline{u} + t\underline{v}) = 0$$
$$(1-t)\underline{u}^2 - t\underline{v}^2 = 0$$
$$(1-t)a^2 - ta^2 = 0 \quad / : a^2 \neq 0$$
$$1 - t - t = 0$$
$$1 = 2t$$
$$\boxed{t = 0.5}$$

זאת, כמובן בהנחה שהקובייה אינה בעלת מקצוע באורך 0 **.**

עבור $t = 0.5$ **נבדוק האם** $\overrightarrow{DB'} \perp \overrightarrow{AE}$ **, כלומר האם** $\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$

$$\overrightarrow{DB'} = \underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \quad , \quad \overrightarrow{AE} = 0.5\underline{u} + 0.5\underline{v} + 0.5\underline{w}$$

$$\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{AE} = (\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) \cdot (0.5\underline{u} + 0.5\underline{v} + 0.5\underline{w}) =$$
$$\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{AE} = 0.5\underline{u}^2 - 0.5\underline{v}^2 + 0.5\underline{w}^2$$
$$\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{AE} = 0.5a^2 - 0.5a^2 + 0.5a^2$$
$$\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{AE} = 0.5a^2$$

לכן, $\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{AE} \neq 0$ **ולא קיים ערך של** t **שעבורו האלכסון** DB' **מאונך למישור** AEF **.**

א. המישור ® מקביל לציר ה- y ולכן וקטור כיוון אחד הוא $\underline{x} = (0,1,0)$.

המישור ® חותך את ציר ה- z בנקודה שבה $z = 1$, ולכן הנקודה $(0,0,1)$ שייכת למישור.

הישר $\ell_1 : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(2m, 0, m+2)$ מוכל במישור ®, ולכן הנקודה $(4, 2, -1)$ שייכת למישור.

נמצא וקטור כיוון שני: $\underline{x} = \underline{(4, 2, -1)} - \underline{(0, 0, 1)} = \underline{(4, 2, -2)} \quad \rightarrow \underline{x} = \underline{(2, 1, -1)}$

נמצא את משוואת המישור, שהצגה הפרמטרית שלו: $\pi : \underline{x} = (0,0,1) + t(0,1,0) + s(2,1,-1)$

נציב במשוואת המישור שלוש נקודות, שאינן על ישר אחד :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$(1) \quad c + d = 0 \qquad t = 0, s = 0$

$(2) \quad b + c + d = 0 \qquad t = 1, s = 0$

$(3) \quad 2a + b + d = 0 \qquad t = 0, s = 1$

$(1) \rightarrow c = -d, \quad (2) \rightarrow b - d + d = 0 \rightarrow b = 0$

$(3) \rightarrow 2a + d = 0 \rightarrow d = -2a$

$b = 0, \quad a = 1, \quad \rightarrow d = -2, \quad c = 2$

$\boxed{® : x + 2z = 2}$

תשובה: משוואת המישור היא $® : x + 2z = 2$.

ב. הישר $\ell_1 : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(2m, 0, m+2)$ מוכל במישור ®,

לכן, וקטור הכיוון של הישר $\underline{x} = (2m, 0, m+2)$ מאונך לנורמל של המישור ®, $\underline{x} = (1, 0, 2)$.

$(1, 0, 2) \cdot (2m, 0, m+2) = 0$

$2m + 2(m+2) = 0$

$2m + 2m + 4 = 0$

$4m = -4$

$\boxed{m = -1}$

תשובה: $m = -1$

נציב $m = -1$ ונקבל $\ell_1 : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-2, 0, 1)$

ג. הישר ℓ_2 , מאונך לציר ה- z , ועובר בראשית הצירים,

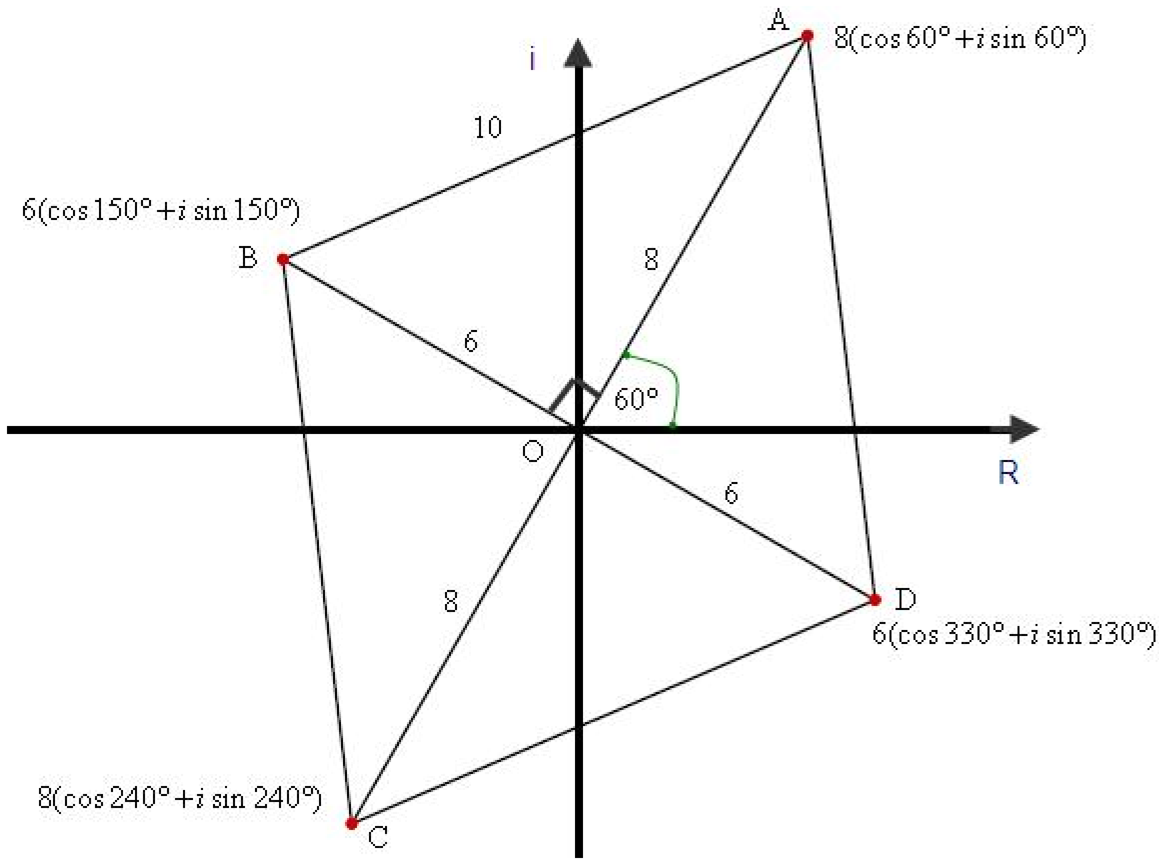
לכן הישר מוכל במישור $[x, y]$, שמשוואתו $z = 0$.

בהתאם נקודת החיתוך עם הישר ℓ_1 תהייה בנקודת החיתוך של ℓ_1 עם המישור $z = 0$.

לכן נקבל : $t = 1 \quad \rightarrow 0 = -1 + t$ **ונקודת החיתוך היא** $(4, 2, -1) + 1(-2, 0, 1) = (2, 2, 0)$**.**

כיוון ש- ℓ_2 עובר בראשית הצירים, הרי שההצגה הפרמטרית שלו היא : $\ell_2 : \underline{x} = t(2, 2, 0)$

תשובה: $\ell_2 : \underline{x} = t(2, 2, 0)$ **(או** $\ell_2 : \underline{x} = t(1, 1, 0)$ **וכל כפל אחר בסקלר, של וקטור הכיוון)**



אחד מקדקודי מעוין מיוצג במישור גאוס על ידי המספר : $8(\cos 60° + i\sin 60°)$**.**

אלכסוני המעוין נחתכים בראשית הצירים, ואורך צלע המעוין שווה ל- 10**.**

אלכסוני המעוין ניצבים זה לזה, לכן הארגומנט (הזווית) של הקדקוד הבא יהיה $150°$**.**

אלכסוני המעוין ניצבים זה לזה, וחוצים זה את זה, לכן

$$(BO)^2 + (AO)^2 = (AB)^2$$
$$(BO)^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$
$$AO = 6$$

כלומר, הרדיוס (האורך), של הקדקודים B **ו-** D **הוא** 6

בהתאם שיעורי הקדקוד הבא: $6(\cos 150° + i\sin 150°)$

מכאן לקדקוד הבא, שהאורך אליו 8 **והזווית** $150° + 90° = 240°$**,**

ובהתאם: $8(\cos 240° + i\sin 240°)$**.**

מכאן לקדקוד הבא, שהאורך אליו 6 **והזווית** $240° + 90° = 330°$**,**

ובהתאם: $6(\cos 330° + i\sin 330°)$**.**

תשובה: $6(\cos 150° + i\sin 150°)$ **,** $8(\cos 240° + i\sin 240°)$, $6(\cos 330° + i\sin 330°)$

יש לפתור את המשוואה: $16\cdot(\frac{4}{3})^{-x-2}+9=25\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2}$

$$16\cdot(\frac{4}{3})^{-x-2}+9=25\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 16\cdot(\frac{3}{4})^{x+2}+9=25\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2} \qquad \leftarrow a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$

$$\Leftrightarrow 16t^2-25t+9=0 \quad \leftarrow \boxed{(\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2}=t}$$

$$\Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{25\pm 7}{32}$$

$$\Leftrightarrow t_1=1 \quad \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2}=1 \quad \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^0 \quad \rightarrow x+2=0 \quad \rightarrow \boxed{x=-2}$$

$$\Leftrightarrow t_2=\frac{9}{16} \quad \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2}=\frac{9}{16} \quad \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^{x+2}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^4 \quad \rightarrow x+2=4 \quad \rightarrow \boxed{x=2}$$

תשובה: $x=2$ **,** $x=-2$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{\ell n\frac{x}{a}}$

נמצא את תחום ההגדרה , כאשר נתון $a>0$

$\ell n\frac{x}{a}\neq 0$

$\frac{x}{a}\neq 1$

$\boxed{x\neq a}$

$\frac{x}{a}>0$

$\boxed{x>0}\leftarrow a>0$

תשובה: $x\neq a$, $x>0$

ב. נמצא את נגזרת הפונקציה :

$$f'(x)=\frac{1\cdot\ell n\frac{x}{a}-x\cdot\frac{1}{(\frac{x}{a})}\cdot\frac{1}{a}}{(\ell n\frac{x}{a})^2}\rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{\ell n\frac{x}{a}-1}{(\ell n\frac{x}{a})^2}}$$

כיוון שנתון כי התחום שבו הפונקציה $f(x)$ **עולה הוא** $x>e^2$ **, הרי ש:** $f'(e^2)=0$

$$\ell n\frac{e^2}{a}-1=0\rightarrow\ell n\,e^2-\ell n\,a-1=0\rightarrow 2-\ell n\,a-1=0$$

$$\ell n\,a=1\rightarrow\boxed{a=e}$$

תשובה: $a=e$.

ג. נחשב את האינטגרל על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית של הביטוי שבמונה.

נתון כי $\int_{e^2}^{b} \frac{1}{f(x)}\,dx = \int_{e^2}^{b} \frac{\ln\frac{x}{e}}{x}\,dx = 1.5$

$$\int_{e^2}^{b} \frac{\ln\frac{x}{e}}{x}\,dx = 1.5$$

$$\int_{e^2}^{b} \ln\left(\frac{x}{e}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx = 1.5$$

$$\left.\frac{(\ln\frac{x}{e})^2}{2}\right]_{e^2}^{b} = 1.5 \quad /:0.5$$

$$(\ln\frac{b}{e})^2 - (\ln\frac{e^2}{e})^2 = 3$$

$$(\ln\frac{b}{e})^2) - (1) = 3$$

$$(\ln\frac{b}{e})^2 = 4$$

$$\ln\frac{b}{e} = 2 \quad \to \ln b - \ln e = 2 \quad \to \ln b = 3 \quad \to \boxed{b = e^3}$$

$$\ln\frac{b}{e} = -2 \quad \to \ln b - \ln e = -2 \quad \to \ln b = -1 \quad \to b = \frac{1}{e}$$

הפתרון השני נפסל, כי נתון $b > e^2$

תשובה: $b = e^3$