נסמן ב- x **את מספר בקבוקי המים המינרלים שקנה רונן בקיוסק**

נסמן ב- y **את מחיר בקבוק אחד של מים מינרלים.**

בקנייה בסופרמרקט היה חוסך רונן 10% **מ-** 42 **שקלים, כלומר היה משלם** 90% **מ-** 42 **שקלים**

ולכן $42\cdot\frac{90}{100}=37.8$ **שקלים**

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה.

סך הכול של התקבולים או התשלומים שווה למחיר כפול כמות .

	כמות	מחיר ליחידה ₪	סך הכול ₪
קנייה בקיוסק	x	y	42
קניה בסופרמרקט	$x+4$	$y-1.5$	37.8

נפתור את מערכת המשוואות המתאימה:

$$\begin{cases} xy=42 \quad \rightarrow y=\frac{42}{x} \\ (x+4)(y-1.5)=37.8 \end{cases}$$

$$(x+4)(\frac{42}{x}-1.5)=37.8$$

$$42-1.5x+\frac{168}{x}-6=37.8 \quad /\cdot x$$

$$42x-1.5x^2+168-6x=37.8x$$

$$0=1.5x^2+1.8x-168$$

$$x_{1,2}=\frac{-1.8\pm31.8}{3}$$

$$x_1=\frac{-1.8+31.8}{3}=\frac{30}{3}=10$$

$$x_2=\frac{-1.8+31.8}{3}=\frac{-33.6}{3}=\cancel{-11.2} \quad \leftarrow x>0$$

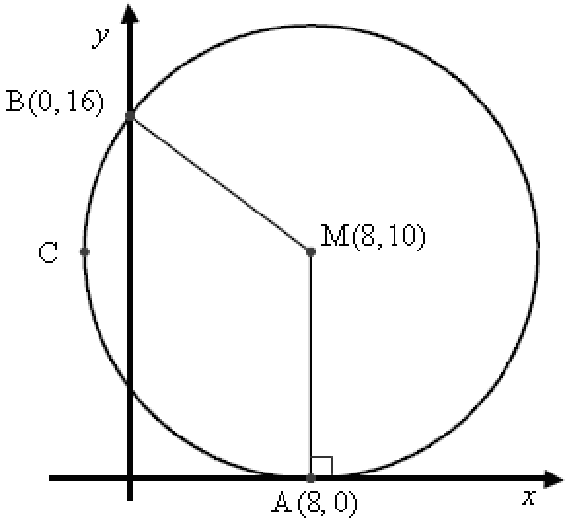
$$\boxed{x=10}$$

$$y=\frac{42}{10}=4.2$$

$$\boxed{y=4.2}$$

תשובה: רונן קנה בקיוסק 10 **בקבוקי מים מינרלים.**

ב. תשובה: המחיר של כל בקבוק מים מינרלים בקיוסק הוא 4.2 **שקלים.**



א. (1) שיעור ה- x של הנקודה A , הנמצאת על ציר ה- x הוא 8.

המעגל משיק לציר ה- x , לכן AM מאונך לציר ה- x ,

כלומר שיעור ה- x של הנקודה M הוא גם 8.

תשובה: $x_M = 8$

(2) ריבוע מרחק של הנקודה $M(8, y)$ מהנקודה $A(8, 0)$

ומהנקודה $B(0,16)$ שווה – שכן אלו רדיוסים:

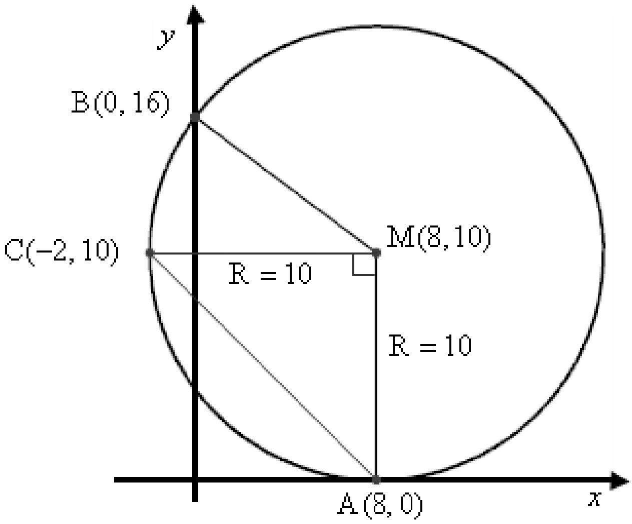
$$(8-8)^2 + (y-0)^2 = (8-0)^2 + (y-16)^2$$
$$y^2 = 64 + (y-16)(y-16)$$
$$y^2 = 64 + y^2 - 16y - 16y + 256$$
$$32y = 320$$
$$y = 10$$

תשובה: $y_M = 10$

ב. מרחק הנקודה $M(8,10)$ מהנקודה $A(8, 0)$ הוא 10

וזה רדיוס המעגל.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-8)^2 + (y-10)^2 = 100$



ג. המשולש AMC הוא ישר זווית,

כי שתי צלעות שלו מקבילות לצירים.

שני הניצבים, CM ו- AM הם רדיוסים, שאורכם 10.

$$S_{\Delta AMC} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$$

תשובה: שטח המשולש AMC הוא 50 יח"ר.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2-60x+144}$

לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x=3$ **,**

כלומר $f'(3)=0$

$$f'(x)=\frac{2ax-60}{2\sqrt{ax^2-60x+144}}$$
$$0=\frac{2a\cdot 3-60}{2\sqrt{a\cdot 3^2-60\cdot 3+144}}$$
$$0=6a-60$$
$$-6a=-60 \quad /:-6$$
$$\boxed{a=10}$$

תשובה: $a=10$

נציב $a=10$ **ונקבל** $\boxed{f(x)=\sqrt{10x^2-60x+144}}$

ב. נמצא את שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=6$

$$f'(x)=\frac{20x-60}{2\sqrt{10x^2-60x+144}}$$
$$f'(6)=\frac{20\cdot 6-60}{2\sqrt{10\cdot 6^2-60\cdot 6+144}}$$
$$f'(6)=\frac{60}{24}=2.5$$

נמצא את נקודת ההשקה:

$$f(6)=\sqrt{10\cdot 6^2-60\cdot 6+144}=12\rightarrow(6,12)$$

נמצא את משוואת המשיק בנקודה $(6,12)$ **ששיפועו** 2.5 **.**

$$y-12=2.5(x-6)$$
$$y-12=2.5x-15$$
$$\boxed{y=2.5x-3}$$

תשובה: $y=2.5x-3$ **.**

ג. בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ $f(0)=\sqrt{10\cdot 0^2-60\cdot 0+144}=12\rightarrow(0,12)$

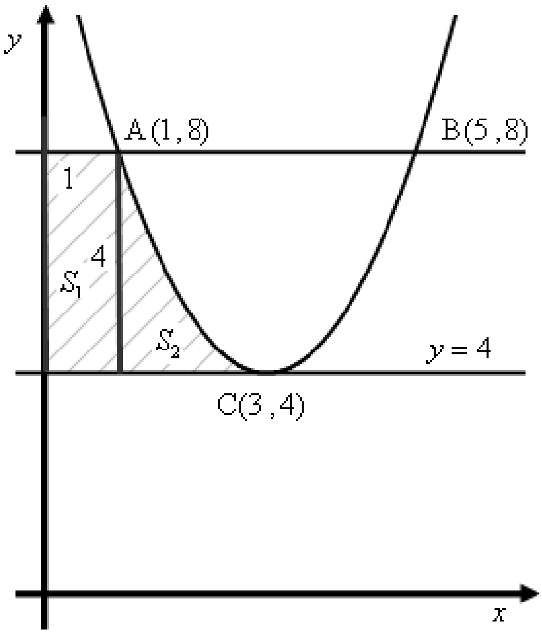
תשובה: $(0,12)$

ד. בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$

$$0=\sqrt{10x^2-60x+144}$$
$$0=10x^2-60x+144$$
$$x_{1,2}=\frac{60\pm\sqrt{-2160}}{10}$$

אין פתרון ובהתאם אין נקודת חיתוך לגרף הפונקציה עם ציר ה- x **.**

נעלה ציור מעודכן ונסביר בהמשך:



א. הישר $y=8$ **חותך את גרף הפונקציה** $f(x)=x^2-6x+13$

בנקודות A **ו-** B.

$$x^2-6x+13=8$$
$$x^2-6x+5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm4}{2} \quad \to x_{\mathrm{A}}=1, x_{\mathrm{B}}=5$$

תשובה: $x_{\mathrm{A}}=1, x_{\mathrm{B}}=5$.

ב. C **היא נקודת המינימום של הפונקציה** $f(x)$

$$f'(x)=2x-6$$
$$0=2x-6$$
$$-2x=-6 \quad /:(-2)$$
$$x=3 \to f(3)=3^2=6\cdot3+13=4$$

תשובה: $\mathrm{C}(3,4)$.

ג. נחשב את השטח המבוקש באמצעות חיבור של שני שטחים: S_1 **ו-** S_2 .

משוואת המשיק בנקודת המינימום היא של פונקציה קבועה $y=4$

שטחו של S_1 **הוא כשטח מלבן,** $S_1=1\cdot4=4$ **(רוחב** $1-0=1$**, אורך** $8-4=4$**)**

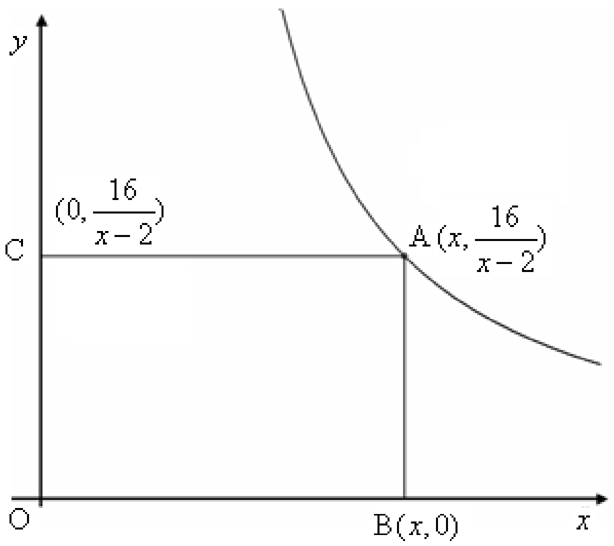
נכין טבלה לסיוע בחישוב S_2 :

	S_2
פונקציה עליונה	$f(x)=x^2-6x+13$
פונקציה תחתונה	$y=4$
x **גדול**	$x=3$
x **קטן**	$x=1$

$$S_2=\int_1^3(x^2-6x+13-4)\,dx$$
$$S_2=\int_1^3(x^2-6x+9)\,dx$$
$$S_2=\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\Big]_1^3$$
$$S_2=(\frac{3^3}{3}-3\cdot3^2+9\cdot3)-(\frac{1^3}{3}-3\cdot1^2+9\cdot1)$$
$$S_2=9-6\frac{1}{3}$$
$$S_2=2\frac{2}{3}$$

נחשב את השטח המקווקו: $S_1+S_2=4+2\frac{2}{3}=\boxed{6\frac{2}{3}}$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא $6\frac{2}{3}$ **יחידות שטח.**



א. שיעורי הנקודה A **הנמצאת על גרף**

הפונקציה $g(x)=\frac{16}{x-2}$ **הם** $A(x,\frac{16}{x-2})$ **.**

הנקודה C **נמצאת על ציר ה-** y **,** AC

מקביל לציר ה- x **, לכן** $AC=x$

הנקודה B **נמצאת על ציר ה-** x **,** AB

מקביל לציר ה- y **, לכן** $AB=\frac{16}{x-2}$

תשובה: $AC=x$ **,** $AB=\frac{16}{x-2}$

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *היקף המלבן*

$$P(x)=2AC+2AB$$

$$P(x)=2x+2\cdot\frac{16}{x-2}$$

$$\boxed{P(x)=2x+\frac{32}{x-2}}$$

$$p'(x)=2-\frac{32\cdot 1}{(x-2)^2} \quad \rightarrow \boxed{p'(x)=2-\frac{32}{(x-2)^2}}$$

$$0=2-\frac{32}{(x-2)^2}$$

$$0=2(x-2)^2-32 \quad \rightarrow 2(x-2)(x-2)=32 \quad \rightarrow 2\left(x^2-2x-2x+4\right)=32 \quad \rightarrow 2x^2-8x+8=32 \quad \rightarrow$$

$$2x^2-8x-24=0 \quad \rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm 16}{4} \quad \rightarrow x_1=6\,,\ x_2=-2$$

$$f\,'(5)=2-\frac{32}{(5-2)^2}=-1.556<0, \quad f\,'(7)=2-\frac{32}{(7-2)^2}=0.72>0 \qquad x_A=6$$ **לכן** A **ברביע הראשון**

x	7	6	5
y'	+	0	-
מסקנה	↗	**Min**	↘

הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.

תשובה: $x_A=6$ **.**

ג. נמצא את ההיקף המינימלי של המלבן $ABOC$ **.**

$g(6)=\frac{16}{6-2}=4$ **ובהתאם שיעורי הנקודה** $A(6,4)$

$P=2\cdot 6+2\cdot 4=20$ **(ניתן גם** $P(6)=2\cdot 6+\frac{32}{6-2}=20$ **)**

תשובה: ההיקף המינימלי של המלבן הוא 20 **יח'.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{x}{a}$

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x=2$ **, כלומר** $f'(2)=0$ **,**

$$f'(x)=-\frac{a\cdot 2x}{x^4}+\frac{1}{a}$$

$$0=-\frac{a\cdot 2\cdot 2}{2^4}+\frac{1}{a} \quad \leftarrow f'(2)=0$$

$$0=-\frac{4a}{16}+\frac{1}{a} \quad \rightarrow -4a^2+16=0$$

$$-4a^2=-16 \quad /:(-4) \quad \rightarrow a^2=4$$

$$\boxed{a=2} \quad \leftarrow a>0$$

תשובה: $a=2$

נציב $a=2$ **ובהתאם** $\boxed{f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{x}{2}}$

ב. בתחום ההגדרה המכנה אינו מתאפס : $x^2\neq 0 \quad \rightarrow x\neq 0$

תשובה: $x\neq 0$

ג. נמצא שיעור ה- y **של נקודת הקיצון:**

$$f(2)=\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2}=1.5 \quad \rightarrow \boxed{y=1.5}$$

נבדוק את סוג הקיצון:

$$f'(x)=-\frac{2\cdot 2x}{x^4}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \boxed{f'(x)=-\frac{4x}{x^4}+\frac{1}{2}}$$

$$0=-\frac{4x}{x^4}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow -8x+x^4=0$$

$$x(-8+x^3)=0$$

$$\cancel{x=0} \quad -8+x^3=0 \quad \rightarrow x^3=8 \quad \rightarrow x=2$$

(השוואת הנגזרת לאפס מסייעת לפתרון סעיף ד, כי היא בודקת ,אם יש נק' חשודות נוספות לקיצון)

נבדוק את סוג הקיצון, בנקודה $(2,1.5)$ **, בעזרת טבלת התנהגות הפונקציה, גם עבור סעיף ד.**

$$f'(1)=-\frac{4\cdot 1}{1^4}+\frac{1}{2}=-3.5<0, \quad f'(3)=-\frac{4\cdot 3}{3^4}+\frac{1}{2}=0.35>0, \quad f'(-1)=-\frac{4\cdot(-1)}{(-1)^4}+\frac{1}{2}=4.5>0$$

x	3	2	1	0	-1
y'	+	0	-		+
מסקנה	↗	Min	↘		↗

תשובה: $y_{\min}=1.5$ **, מינימום.**

ד. עלייה: $x>2$ **או** $x<0$ **, ירידה:** $0<x<2$