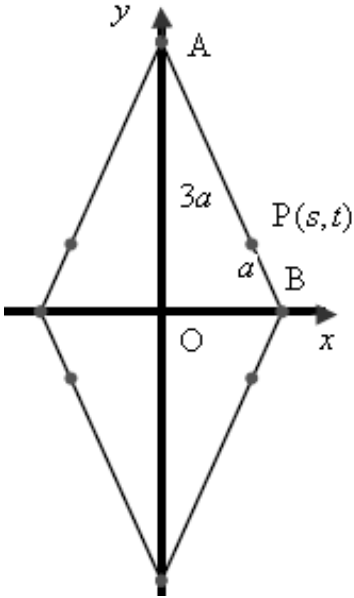


א. (1) כיוון שלא נתון על אילו קרניים של הצירים ממוקמות הנקודות A ו-B, יש ארבע אפשרויות לציור.



נסמן $P(s, t)$, נקודה על המקום הגיאומטרי (ברביע הראשון, מבלי להגביל את הכלליות),

$$\frac{AP}{PB} = 3 \text{ כאשר על פי הנתון}$$

על פי נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון:

$$s = \frac{1 \cdot 0 + 3x_B}{4} \quad t = \frac{1 \cdot y_A + 3 \cdot 0}{4}$$

$$x_B = \frac{4}{3}s \quad 4t = y_A$$

$$B\left(\frac{4}{3}s, 0\right), \quad A(0, 4t)$$

אורך הקטע AB הוא $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1} \neq 0$).

על פי משפט פיתגורס:

$$\left(\frac{4}{3}s\right)^2 + (4t)^2 = \mathbf{1}^2$$

$$\frac{16s^2}{9} + 16t^2 = \mathbf{1}^2$$

$$\boxed{\frac{16x^2}{9} + 16y^2 = \mathbf{1}^2}$$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא $\frac{16x^2}{9} + 16y^2 = \mathbf{1}^2$

(2) המקום הגיאומטרי הוא אליפסה, ונראה זאת בהרחבה.

$$a^2 = \frac{9\mathbf{1}^2}{16} \rightarrow a = \frac{3}{4}\mathbf{1}$$

$$b^2 = \frac{\mathbf{1}^2}{16} \rightarrow b = \frac{1}{4}\mathbf{1}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{\mathbf{1}^2}{2} \rightarrow F_2\left(-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad F_1\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא אליפסה.

ב. רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOB הוא 4 ו- $\frac{OA}{OB} = 3$.

כיוון שמשולש AOB ישר זווית, הרי מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר AB, ומכאן ש- $AB = 8$.

נסמן: $OB = x \rightarrow OA = 3x$

ומכאן ש- $AB = 8$.

נשתמש במשפט פיתגורס ובקשר שבין שיעורי הנקודה P לשיעורי הנקודות A ו- B.

$$(3x)^2 + x^2 = 8^2$$

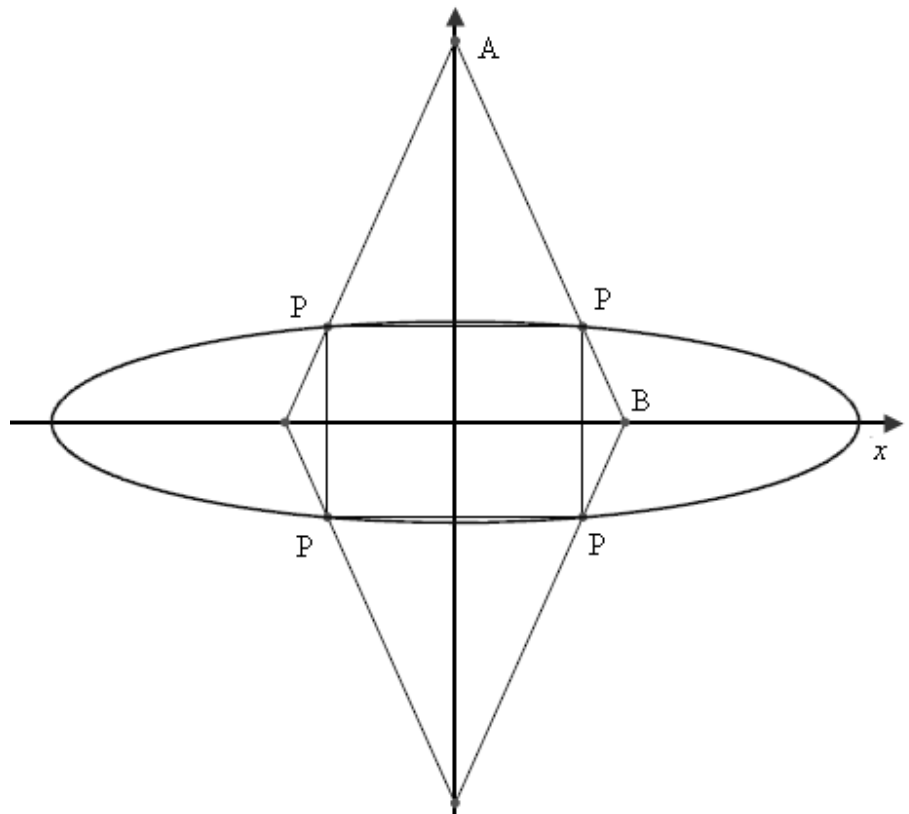
$$10x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{6.4} \rightarrow 3x = \pm 3\sqrt{6.4}$$

$$x_P = \frac{3x_B}{4} \quad y_P = \frac{y_A}{4}$$

$$P\left(\pm \frac{3\sqrt{6.4}}{4}, \pm \frac{3\sqrt{6.4}}{4}\right)$$

הצורה מתקבלת היא ריבוע.



$$\frac{3\sqrt{6.4}}{4} - \left(-\frac{3\sqrt{6.4}}{4}\right) = 1.5\sqrt{6.4}$$

אורך צלע הריבוע $1.5\sqrt{6.4}$

$$4 \cdot 1.5\sqrt{6.4} = 6\sqrt{6.4} = 15.18$$

היקף הריבוע: 15.18

תשובה: היקף המצולע 15.18 יח'.

א. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. אחד המוקדים של ההיפרבולה הוא $(8, 0)$

ההיפרבולה שוות שוקיים $(a = b)$,

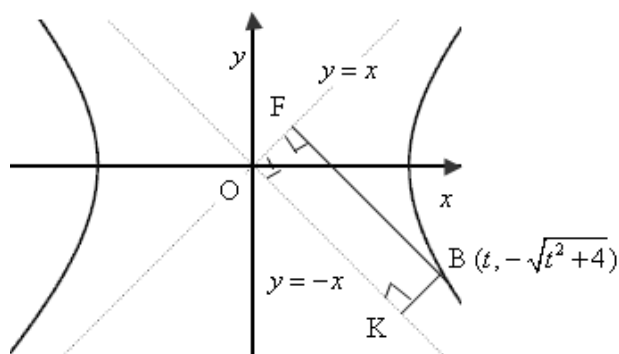
לכן משוואות האסימפטוטות המאונכות זו לזו הן: $y = x$, $y = -x$ (או $-x + y = 0$, $x + y = 0$)

בהיפרבולה מתקיים $a^2 + b^2 = c^2$, כאשר על פי הנתון $c = 8$.

בהתאם: $a = \sqrt{32} \rightarrow a^2 = 32 \rightarrow 2a^2 = 64$ ומשוואת ההיפרבולה: $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$, או $x^2 - y^2 = 32$.

נסמן את שיעורי הנקודה $(t, -\sqrt{t^2 + 32})$, מבלי להגביל את הכלליות, ונמצא את שטח המלבן שנוצר.

בלא קשר למיקום הנקודה B היא תמיד מעל לאסימפטוטה אחת ומתחת לשנייה.



$$BF = \frac{|-t - \sqrt{t^2 + 32}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|t + \sqrt{t^2 + 32}|}{\sqrt{2}}$$

$$BK = \frac{|t - \sqrt{t^2 + 32}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|t - \sqrt{t^2 + 32}|}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{OFBK}} = \frac{|t + \sqrt{t^2 + 32}|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|t - \sqrt{t^2 + 32}|}{\sqrt{2}} = \frac{|t^2 - (t^2 + 32)|}{2} = 16$$

תשובה: שטח המרובע OFBK הוא 16 יח"ר.

ב. האסימפטוטות להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ הן: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

משוואת ישר המקביל לאסימפטוטה הוא למשל $y = \frac{b}{a}x + n$ ($n \neq 0$),

נציב במשוואת ההיפרבולה: $b^2x^2 - a^2\left(\frac{b}{a}x + n\right)^2 = a^2b^2$

$$b^2x^2 - \frac{a^2b^2x^2}{a^2} - \frac{2a^2bnx}{a} - n^2a^2 = a^2b^2$$

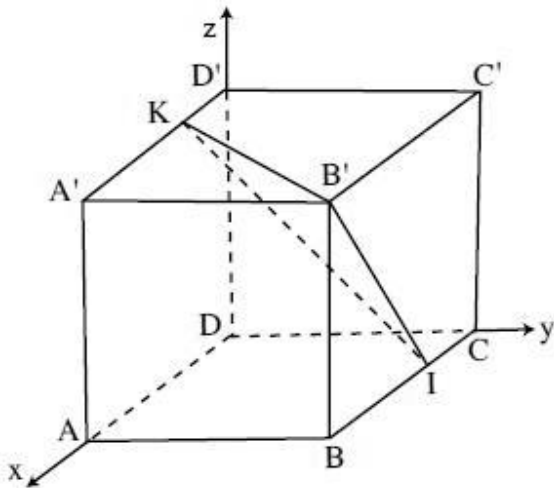
$$b^2x^2 - b^2x^2 - 2abnx - n^2a^2 = a^2b^2$$

$$-2abnx - n^2a^2 = a^2b^2 \quad /: a \neq 0$$

$$-2bnx - an^2 = ab^2$$

$$x = -\frac{a(b^2 + n^2)}{2bn}$$

תשובה: יש נקודת חיתוך אחת.



א. משוואת מישור הבסיס ABCD היא $p_1: z=0$

שיעורי קדקודי הקובייה הם:

$$D(0, 0, 0), A'(a, 0, a), B'(a, a, a), C'(0, a, a), D'(0, 0, a)$$

$$BI = \frac{2}{3}BC, A'K = \frac{2}{3}A'D'$$

נמצא את הווקטור המאונך למישור KB'I, ולכן מאונך לכל וקטור

$$\vec{KB'} = \vec{B'} - \vec{K} = \underline{x} = \left(\frac{2a}{3}, a, 0\right), \vec{IB'} = \vec{B'} - \vec{I} = \underline{x} = \left(\frac{2a}{3}, 0, a\right)$$

$$\left. \begin{aligned} (r, s, t) \left(\frac{2a}{3}, a, 0\right) = 0 &\rightarrow \frac{2ar}{3} + as = 0 \quad /: a \neq 0 \\ (r, s, t) \left(\frac{2a}{3}, 0, a\right) = 0 &\rightarrow \frac{2ar}{3} + at = 0 \quad /: a \neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2r + 3s = 0 \\ 2r + 3t = 0 \end{aligned} \right\} s = t, s = 1 \rightarrow t = 1 \rightarrow r = -1.5 \rightarrow \boxed{\underline{x} = p(-1.5, 1, 1)}$$

וההצגה הפרמטרית של האנך אנך מקדקוד C' למישור KB'I היא $h: \underline{x} = (0, a, a) + p(-1.5, 1, 1)$, כאשר נקודה טיפוסית עליו היא $(-1.5p, a+p, a+p)$.

נציב את הנקודה הטיפוסית במשוואת מישור הבסיס ABCD $p_1: z=0$

$$(-1.5(-a), a+(-a), a+(-a)) = \boxed{(1.5a, 0, 0)} \text{ ומכאן שנקודת החיתוך היא } a+p=0 \rightarrow p=-a$$

ונקבל תשובה: שיעורי נקודת החיתוך הם $(1.5a, 0, 0)$.

ב. נמצא את משוואת המישור KB'I, שהנורמל שלו הוא $h: \underline{x} = (-1.5, 1, 1)$, כלומר: $p_2: -1.5x + y + z + d = 0$

נציב שיעורי הקדקוד B'(a, a, a) ונקבל: $-1.5 \cdot a + a + a + d = 0 \rightarrow d = -0.5a$ ולכן: $p_2: -1.5x + y + z - 0.5a = 0$

מרחק הנקודה N(1.5a, 0, 0) מהמישור KB'I הוא $\frac{22}{\sqrt{17}}$.

$$\frac{22}{\sqrt{17}} = \frac{|-1.5 \cdot 1.5a + 0 + 0 - 0.5a|}{\sqrt{1.5^2 + 1^2 + 1^2}} \rightarrow \frac{22}{\sqrt{17}} = \frac{|-2.75a|}{\sqrt{4.25}}$$

$$11 = |-2.75a| \rightarrow \boxed{a=4} \leftarrow a > 0$$

משוואת מישור הפאה DCC'D' היא $p_3: x=0$ ושטח הפאה 16 יח"ר $= 4^2$

עבור $a=4$ שיעורי קדקוד N(6, 0, 0) ומרחקו מהפאה 6 יחידות.

$$.V = \frac{16 \cdot 6}{3} = 32 \text{ הוא נפח הפירמידה } BDCC'D'$$

תשובה: נפח הפירמידה 32 יחידות נפח.

נכתב ע"י עפר ילין

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} z + \bar{w}^3 = 0 \\ z \cdot w^5 = 1 \end{cases}$$

w ו- z הם מספרים מרוכבים, ונתון $|z| = |w| = 1$.

נסמן $w = a + bi$, ונמצא את ערך המכפלה $w \cdot \bar{w}$.

$$w \cdot \bar{w} = (a + bi)(a - bi)$$

$$w \cdot \bar{w} = a^2 + b^2$$

$$|w| = 1 \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$$\boxed{w \cdot \bar{w} = 1}$$

נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} z + \bar{w}^3 = 0 \\ z \cdot w^5 = 1 \end{cases}$$

$$z = -\bar{w}^3$$

$$-\bar{w}^3 \cdot w^5 = 1$$

$$-\bar{w}^3 \cdot w^3 \cdot w^2 = 1$$

$$-(\bar{w} \cdot w)^3 \cdot w^2 = 1$$

$$-1^3 \cdot w^2 = 1$$

$$w^2 = -1$$

$$\boxed{w = i} \rightarrow z = -\bar{w}^3 = -(-i)^3 \rightarrow \boxed{z = -i}$$

$$\boxed{w = -i} \rightarrow z = -\bar{w}^3 = -i^3 \rightarrow \boxed{z = i}$$

תשובה: $z = i$, $w = -i$ או $z = -i$, $w = i$.

יש לפתור את האי-שוויון: $|4i-1-\log_2 x|^2 \geq 25$ (תחום הגדרה $x > 0$).

הערך המוחלט של מספר מרוכב $z = a + bi$ הוא $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$|4i-1-\log_2 x|^2 \geq 25$$

$$\sqrt{(16+(1+\log_2 x)^2)} \geq 25$$

$$16+(1+\log_2 x)^2 \geq 25$$

$$(1+\log_2 x)^2 \geq 9$$

$$1+\log_2 x \geq 3$$

$$1+\log_2 x \leq -3$$

$$\log_2 x \geq 2$$

$$\log_2 x \leq -4$$

$$\boxed{x \geq 4}$$

$$x \leq 2^{-4} = \frac{1}{16} \rightarrow \boxed{0 < x \leq \frac{1}{16}} \leftarrow x > 0$$

הבסיס גדול מ-1 לכן $\log_2 x$ פונקציה עולה, ובהתאם לא הוחלף כיוון סימן אי השוויון.

תשובה: $x \geq 4$ או $0 < x \leq \frac{1}{16}$

בגרות ע מאי 10 מועד גנז שאלון 35007

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$, המוגדרת לכל x , והנגזרת שלה $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$.

נגזרת הפונקציה מתאפסת עבור $x = \ln 3 \rightarrow e^x = 3$, אולם הנגזרת היא אי-שלילית ולכן אין נקודות קיצון.

תשובה: לפונקציה אין נקודות קיצון.

(2) עבור $x = \ln 3$, $f'(x) = 0$ והנגזרת אינה משנה סימן, לכן זו נקודת פיתול בה המשיק מקביל לציר ה- x .

מעבר לכך, $f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}$, אינה מתאפסת, למעט עבור $x = \ln 3$ וזו נקודת הפיתול היחידה.

תשובה: $x = \ln 3$

ב. (1) $f''(x) = 0$ עבור $x = \ln 3$, חיובית עבור $x > \ln 3$ ושלילית עבור $x < \ln 3$.

לכן $f'(x)$ יורדת עבור $x < \ln 3$ ועולה עבור $x > \ln 3$, ובהתאם $x = \ln 3$ מינימום של $f'(x)$

תשובה: $x = \ln 3$ מינימום.

(2) $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$ מוגדרת לכל x ואין אסימפטוטה אנכית.

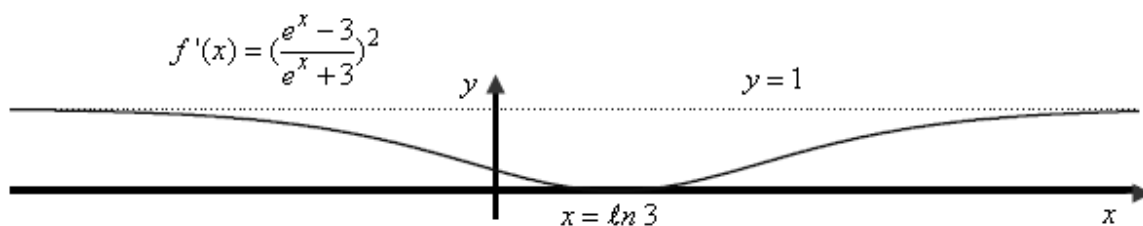
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{3}{e^x}}\right)^2 = \left(\frac{1 - 0}{1 + 0}\right)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 = \left(\frac{0 - 3}{0 + 3}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

ובהתאם הישר $y = 1$, מהווה אסימפטוטה אופקית

תשובה: $y = 1$.

(3) סרטוט גרף הנגזרת $f'(x)$



ג. (1) נמצא את שיעורי ה- x בין הפונקציות $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ו- $f''(x) = \frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$

$$\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3} = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

$$\frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3} = \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

$$12e^x(e^x-3) = (e^x+3)(e^x-3)^2$$

$$12e^x(e^x-3) - (e^x+3)(e^x-3)^2 = 0$$

$$(e^x-3)(12e^x - (e^x+3)(e^x-3)) = 0$$

$$(e^x-3)(12e^x - (e^{2x}-9)) = 0$$

$$(e^x-3)(-e^{2x}+12e^x+9) = 0$$

$$\boxed{x = \ln 3}$$

$$-e^{2x}+12e^x+9 = 0$$

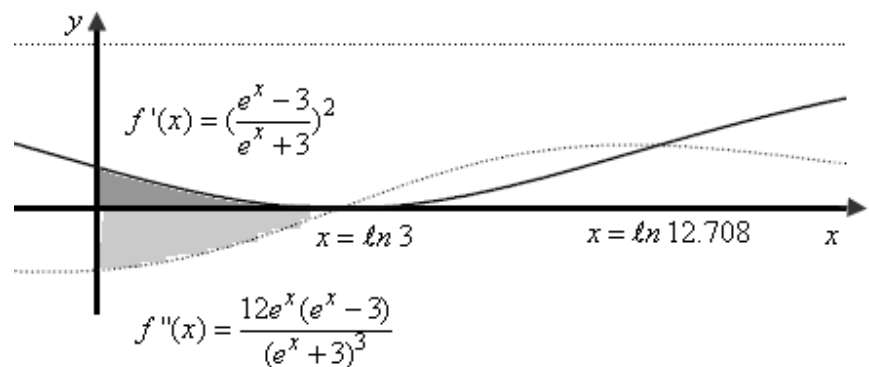
$$(e^x)_{1,2} = \frac{-12 \pm 13.416}{-2}$$

$$e^x = -0.708$$

$$e^x = 12.708 \rightarrow \boxed{x = \ln 12.708}$$

תשובה: $x = \ln 12.708$, $x = \ln 3$

(2) נמצא את גודל השטח הירוק:



$$S = \int_0^{\ln 3} (f'(x) - f''(x)) dx = (f(x) - f'(x)) \Big|_0^{\ln 3}$$

$$S = (f(\ln 3) - f'(\ln 3)) - (f(0) - f'(0))$$

$$S = (\ln 3 + 2 - \frac{4 \cdot 3}{3+3} - (\frac{3-3}{3+3})^2) - (0 + 2 - \frac{4 \cdot 1}{1+3} - (\frac{1-3}{1+3})^2)$$

$$S = \ln 3 + 2 - 2 - 0 - 2 + 1 + 0.25$$

$$\boxed{S = \ln 3 - 0.75}$$

תשובה: גודל השטח $\ln 3 - 0.75$.

נכתב ע"י עפר ילין