1.

נתונה הפונקציה $f(x)=(m^2-m-6)x^2+(2m+4)x+2$

א. יש למצוא עבור אילו ערכי m **גרף הפונקציה** $f(x)$ **אינו חותך את ציר ה-** x **.**

$$f(x)=(m^2-m-6)x^2+(2m+4)x+2$$

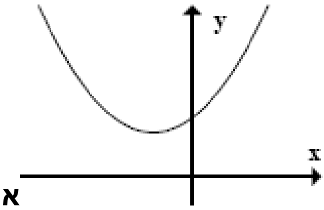
$$f(x)=(m-3)(m+2)x^2+2(m+2)x+2$$

$$a=(m-3)(m+2) \quad b=2(m+2) \quad c=2$$

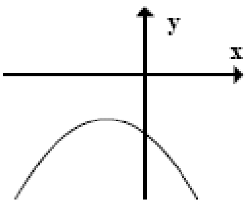
התקבלה פונקציה שהגרף שלה הוא ישר או פרבולה.

יש לבדוק אפשרות שהגרף אינו חותך ציר ה- x

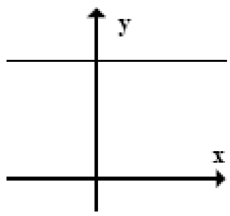
ובהתאם אפשרי גרף של פרבולה, בעלת מינימום או בעלת מקסימום, כדוגמת:



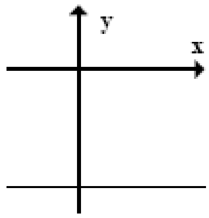
או



או גרף של ישר, מקביל לציר ה- x **כדוגמת:**



או



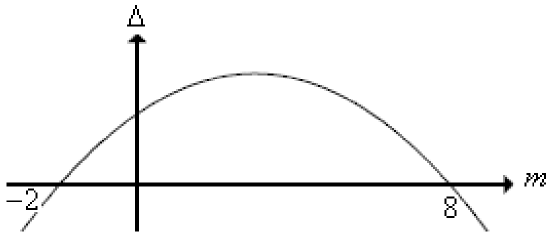
<u>מקרה הפרבולה (גרף של פונקציה ריבועית)</u>

התנאים הנדרשים הם: $\Delta < 0$ **(אין חיתוך עם ציר ה-** x**)**

$a \neq 0$ **(גרף של פרבולה)**

<u>$\Delta < 0$</u>

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$
$$(2(m+2))^2 - 4\cdot(m-3)(m+2)\cdot 2 < 0$$
$$4(m+2)(m+2-2(m-3) < 0$$
$$4(m+2)(m+2-2m+6) < 0$$
$$\boxed{4(m+2)(8-m) < 0}$$



והפתרון לאי השוויון הוא: $m > 8$ **או** $m < -2$

$a \neq 0$**, כלומר** $m \neq -2$ **, או** $m \neq 3$

לכן תשובה משותפת לשני התנאים: $m > 8$ **או** $m < -2$ **.**

<u>מקרה הישר (גרף של פונקציה ממעלה ראשונה)</u>

$a = 0$**, כלומר** $m = -2$ **, או** $m = 3$

נציב $m = -2$ **ונקבל:** $f(x) = (-2-3)(-2+2)x^2 + 2(-2+2)x + 2$ **, כלומר** $f(x) = 2$ **<u>שלא חותך</u> את ציר ה-** x

נציב $m = 3$ **ונקבל:** $f(x) = (3-3)(3+2)x^2 + 2(3+2)x + 2$ **, כלומר** $f(x) = 10x + 2$ **<u>שחותך</u> את ציר ה-** x $(-\frac{2}{10},0)$

לכן, $m = -2$ **עונה לתנאי השאלה**

תשובה מאוחדת: $m > 8$ **או** $m \leq -2$

ב. יש למצוא עבור אילו ערכי m **גרף הפונקציה** $f(x)$ **חותך את ציר ה-** x **בנקודה שבה** $x = 1$ **.**

ראינו שאין זה המקרה של הפונקציה ממעלה ראשונה ($f(x) = 10x + 2$ **חותך את ציר ה-** x **ב-** $(-\frac{2}{10},0)$**).**

נציב $x = 1$ **בתבנית הפונקציה הריבועית ונשווה ל-** 0

$$0 = (m^2 - m - 6)1^2 + (2m+4)1 + 2$$
$$0 = m^2 + m$$
$$0 = m(m+1)$$

תשובה: $m = 0$ **או** , $m = -1$ **(נשים לב שערכים אלו אכן בתחום שבו יש חיתוך עם ציר ה-** x**).**

ג. יש למצוא עבור ערכי m **שמצאנו בסעיף ב (1) , כמה נקודות חיתוך יש לגרף עם ציר ה-** x .

מכיוון וערכים אלו, $m = 0$ **או** , $m = -1$**, נמצאים בתחום שבו** $\Delta > 0$**, וגם** $a \neq 0$ **הרי שיש שתי נקודות חיתוך**.

תשובה: שתי נקודות חיתוך

.2

א. נתונה סדרה חשבונית ... $114, \ 117, \ 120$

בהתאם: $\boxed{a_1 = 120}$ **ו-** $\boxed{d = -3}$

יש למצוא עבור אילו ערכים של n **סכום** n **האיברים הראשונים של הסדרה קטן מאפס.**

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$

$$\frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1)) < 0 \quad / : \frac{n}{2} > 0$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot 120 - 3(n-1)) < 0 \quad / : 2 > 0$$
$$\Leftrightarrow 240 - 3n + 3 < 0$$
$$\Leftrightarrow -3n < -243 \quad / : (-3) < 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{n > 81}$$

לכן עבור $n > 81$ **סכום** n **האיברים הראשונים של הסדרה קטן מאפס.**

בדיקה:

$$a_{82} = 120 - 3 \cdot 81 = -123$$
$$S_{82} = \frac{82}{2}(120 - 123) = -123 < 0$$

ב. סדרת האיברים השליליים היא חשבונית, שבה $\boxed{d = -3}$

נעזר בנוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית: $a_n = a_1 + d(n-1)$,

למציאת האיבר הראשון השלילי בסדרה המקורית:

$$a_n < 0$$
$$120 - 3(n-1) < 0$$
$$120 - 3n + 3 < 0$$
$$-3n < -123 \quad / : (-3) < 0$$
$$n > 41$$

כלומר הסדרה שלילית החל מהאיבר ה- 42 **.**

$$a_{42} = 120 - 3 \cdot 41 = -3$$

סדרת האיברים השליליים היא חשבונית, שבה $\boxed{a_1 = -3}$ $\boxed{d = -3}$

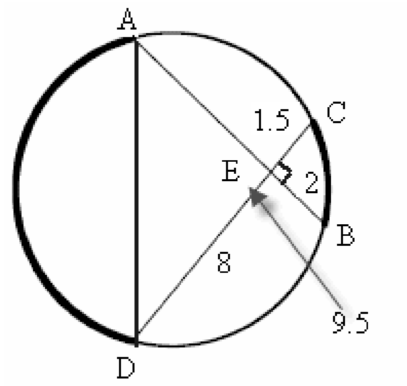
נתון כי בסדרה זו $a_n = -357$

$$-357 = -3 - 3(n-1)$$
$$-357 = -3 - 3n + 3$$
$$3n = 357$$
$$n = 119$$

תשובה: בסדרה יש 119 **איברים שליליים.**

.3

נעלה את הציור עם דרך הפתרון ונסביר בהמשך.



<u>נתונים</u>

.1 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=180^\circ$

עבור ב'

.2 $DE =$ 8 **ס"מ**

.3 $DC =$ 9.5 **ס"מ**

.4 $EB =$ 2 **ס"מ**

צ"ל:

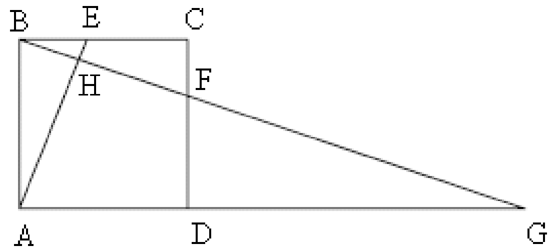
א. $AB \perp DC$

ב. אורך המיתר AD

הוכחה

הסבר		טענה	נימוק
1	5	$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=180^\circ$	נתון
3	6	$\angle CEB=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$	זווית פנימית במעגל שווה לסכום שתי הזוויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית, וזווית היקפית שווה לחצי הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת, כלומר לחצי מהקשת.
5,6	7	$\angle CEB=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{2}$ $\angle CEB=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$	הצבה
7	8	$AB\perp DC$	בין הישרים יש זווית ישרה
		מ.ש.ל. א	
3	9	$DC=9.5$ ס"מ	נתון
4	10	$DE=8$ ס"מ	נתון
10	11	$DC-DE=EC$	חיסור קטעים
9,10,11	12	$EC=1.5$ ס"מ	הצבה וחישוב
6,12	13	$DE\cdot EC=AE\cdot EB$	שני מיתרים נחתכים במעגל, כך שמכפלת קטעי המיתר הראשון שווה למכפלת קטעי המיתר השני
4	14	$EB=2$ ס"מ	נתון
9,10,12	15	$8\cdot 1.5=AE\cdot 2$	הצבה
15	16	$AE=6$ ס"מ	חישוב
7	17	$AD\perp BC$	הוכח
20	18	$AD^2=DE^2+AE^2$	משפט פיתגורס ΔADE
10,16,18	19	$AD^2=8^2+6^2$	הצבה
	20	$AD=10$ ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל. ב	

.4



<u>נתונים</u>

.1 $ABCD$ **הוא ריבוע**

עבור א'

.2 $BE = FC$

עבור ב'

.3 $FD = 2\,CF$

צ"ל:

א. (1) $\Delta AEB \cong \Delta BFC$

(2) המרובע $AHFD$ **בר חסימה**

ב. $\frac{DG}{BC}$, $\frac{DG}{CF}$

<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
		נביט על ΔBFC **ו-** ΔAEB **ונראה שהם חופפים**	
1	4	$ABCD$ **הוא ריבוע**	**נתון**
3	5	$AB = BC$ **(צ)**	**צלעות הריבוע שוות זו לזו**
5	6	$\angle ABC = \angle BCF = 90°$ **(ז)**	**זוויות הריבוע ישרות**
2	7	$BE = FC$ **(צ)**	**נתון**
5,6,7	8	$\Delta AEB \cong \Delta BFC$	**משפט חפיפה ראשון (צ. ז. צ.)**
		מ.ש.ל. א (1)	
8	9	$\angle BAE = \angle CBF = a$ **(ז)**	**ז.מ.ב.ח + סימון**
4	10	$\angle BCF = \angle BAD = 90°$	**זוויות הריבוע ישרות**
9,10	11	$\angle DFH = 90° + a$	**זווית חיצונית (** ΔBCF **) שווה לסכום** **שתי הזוויות הפנימיות שלא צמודות לה**
9,10	12	$\angle HAD = 90° - a$	**הפרש זוויות**
11,12	13	$\angle HAD + \angle DFH = 180°$	**חישוב**
10,11,12	12	**מרובע** $AHFD$ **בר חסימה**	**סכום זוויות נגדיות** $180°$
		מ.ש.ל. א (2)	
4	13	$BC \parallel AD$	**צלעות נגדיות מקבילות בריבוע**
13	14	$BC \parallel DG$	**המשכים של ישרים מקבילים – מקבילים זה לזה**
14	15	$\frac{DG}{BC} = \frac{FD}{CF}$	**משפט תאלס (הרחבה 2)**
3	16	$FD = 2\,CF$	**נתון**
15,16	17	$\frac{DG}{BC} = \frac{2\,CF}{CF}$	**הצבה**
17	18	$\boxed{\frac{DG}{BC} = 2}$	**חישוב**
4	19	$DC = CB$	**צלעות הריבוע שוות זו לזו**
18,19	20	$\frac{DG}{DC} = 2$	**הצבה**
18	21	$DC = 3CF$	**חישוב**
20,21	22	$\boxed{\frac{DG}{CF} = 6}$	**הצבה וחישוב**
		מ.ש.ל. ב	

.5

א. נגדיר את המאורעות המתאימים:

A - **מצליח במבחן הראשון**

$\overline{A}$ - **לא מצליח (נכשל) במבחן הראשון**

B - **מצליח במבחן השני**

$\overline{B}$ - **לא מצליח (נכשל) במבחן השני**

נתונים ומשמעויות

$$P(A) = 0.6 \quad \rightarrow P(\overline{A}) = 0.4$$

$$P(B) = 0.7 \quad \rightarrow P(\overline{B}) = 0.3$$

$$P(A/B) = 0.8 \quad \rightarrow P(\overline{A}/B) = 0.2$$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.7}$$

$$P(A \cap B) = 0.56$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים

	A **מצליח** I	$\overline{A}$ **לא מצליח** I	
B - **מצליח** II	0.56	0.14	0.7
$\overline{B}$ - **לא מצליח** II	0.04	0.26	0.3
	0.6	0.4	1

(1) יש לחשב את ההסתברות שהתלמיד שנבחר יצליח לפחות באחד משני המבחנים,

כלומר את $P(A \cup B)$ **:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.6 + 0.7 - 0.56$$

$$P(A \cup B) = 0.74$$

תשובה: ההסתברות שהתלמיד שנבחר יצליח לפחות באחד משני המבחנים היא 0.74

(2) יש לחשב מהי ההסתברות שלפחות 2 מתוך 3 שנבחרו יצליחו לפחות באחד משני המבחנים

יש כאן התפלגות בינומית.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

כאשר: $p=0.74 \quad k=2 \quad n=3$ **,**

$$P_3(2)=\binom{3}{2}(0.74)^2(1-0.74)^{3-2}$$

$$P_3(2)=\frac{3!}{2!(3-2)!}0.74^2\cdot 0.26$$

$$P_3(2)=3\cdot 0.74^2\cdot 0.26$$

$$P_3(2)=0.427128$$

תשובה: ההסתברות שלפחות 2 מתוך 3 שנבחרו יצליחו לפחות באחד משני המבחנים היא 0.427128

ב. יש לחשב מהי ההסתברות ששני התלמידים שנבחרו ייכשלו במבחן הראשון ויצליחו במבחן השני

נחשב את ההסתברות המותנית – להיכשלות במבחן הראשון ולהצלחה במבחן השני

כלומר את $P(B \cap \overline{A})$

עפ"י הטבלה $P(B \cap \overline{A}) = 0.14$

ההסתברות ששני התלמידים $P_2(2)=p^2$ **יצליחו במבחן הראשון וייכשלו במבחן השני היא:** $0.14^2=0.0196$

תשובה: 0.0196

6.

א. נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - **קבוצת המנהלים שהשתתפו במשאל הסודי**

A - **קבוצת התומכים ביום חינוך ארוך**

$\overline{A}$ - **קבוצת המתנגדים ליום חינוך ארוך**

B - **קבוצת הגברים**

$\overline{B}$ - **קבוצת הנשים**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(B/\overline{A}) = 0.25 \quad \rightarrow P(\overline{B}/\overline{A}) = 0.75$$

$$P(\overline{B}/A) = 0.75 \quad \rightarrow P(B/A) = 0.25$$

$$N(A) = 1.5N(\overline{A})$$
$$P(A) = 1.5P(\overline{A})$$
$$P(A) = 1.5(1 - P(A))$$
$$P(A) = 1.5 - 1.5P(A)$$
$$2.5P(A) = 1.5$$
$$P(A) = 0.6 \quad \rightarrow P(\overline{A}) = 0.4$$

<u>פיתוח נוסחאות פרופורציה מותנית</u>

$$P(B/\overline{A}) = 0.25$$
$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$
$$0.25 = \frac{P(B \cap \overline{A})}{0.4}$$
$$\boxed{P(B \cap \overline{A}) = 0.1}$$

<u>נציב בטבלה ונשלים נתונים</u>

	A תומכים	$\bar{A}$ מתנגדים	
B - גברים	0.15	0.1	0.25
$\bar{B}$ - נשים	0.45	0.3	0.75
	0.6	0.4	1

פרופורציית הגברים מבין התומכים ביום לימודים ארוך : $P(B/A)$

חושבה כבר בהתחלה, על סמך הנוסחה: $P(B/A)+P(\bar{B}/A)=1$

תשובה: 0.25

ב. פרופורציית התומכים ביום לימודים ארוך מבין הגברים: $P(A/B)$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B)=\frac{0.15}{0.25}$$

$$\boxed{P(A/B)=0.6}$$

תשובה: פרופורציית התומכים ביום לימודים ארוך מבין הגברים היא 0.6

ג. נבדוק האם קיים קשר סטטיסטי בין מין הנשאל לבין עמדתו לגבי יום לימודים ארוך.

נשתמש בנוסחה למציאת קשר סטטיסטי: $P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cap B)$

ומכיוון ומתקיים השוויון $0.6\cdot 0.25=0.15$ **, הרי שאין קשר סטטיסטי.**

תשובה: לא קיים קשר סטטיסטי בין מין הנשאל לבין עמדתו לגבי יום לימודים ארוך.

ד. יש למצוא את הסיכוי שהכתב יזהה נכון את העמדה של המנהל לגבי יום לימודים ארוך

נסמן: D **- קבוצת המנהלים (גברים/ נשים) שהמראיין יגדיר כתומכים**

$\overline{D}$ **- קבוצת המנהלים (גברים/ נשים) שהמראיין יגדיר כמתנגדים**

לכן נדרש למצוא את: $P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap \overline{A})$

נתון: $P(\overline{D}/A) = 0.2 \leftarrow P(D/A) = 0.8$ **,**

$P(D/\overline{A}) = 0.4 \leftarrow P(\overline{D}/\overline{A}) = 0.6$ **,**

ועל פי א': $P(A) = 0.6, \quad P(\overline{A}) = 0.4$

<u>פיתוח נוסחאות פרופורציה מותנית</u>

$$P(D/A) = 0.8$$

$$0.8 = \frac{P(D \cap A)}{0.6}$$

$$\boxed{P(D \cap A) = 0.48}$$

$$P(\overline{D}/\overline{A}) = 0.8$$

$$0.6 = \frac{P(\overline{D} \cap \overline{A})}{0.4}$$

$$\boxed{P(\overline{D} \cap \overline{A}) = 0.24}$$

ובהתאם: $P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap \overline{A}) = 0.48 + 0.24 = 0.72$

תשובה: הסיכוי שהכתב יזהה נכון את העמדה של המנהל לגבי יום לימודים ארוך הוא 0.72