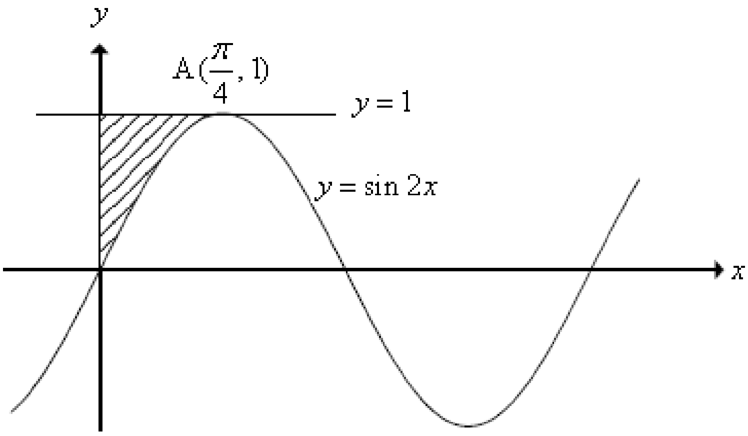
.1

נביא את הציור המעודכן ופרטים בהמשך.



א. בציור מתואר הגרף של הפונקציה $y = \sin 2x$

הישר $y = 1$ **משיק לפונקציה** $y = \sin 2x$

שיפוע הישר 0 **ולכן הוא ישיק בנקודת המקסימום,**

אך למציאת נקודת ההשקה בין הישר לפונקציה –

ניתן במקרה זה להשוות בין משוואת הישר לפונקציה.

$\sin 2x = 1$

$2x = \frac{p}{2} + 2pk$

$x = \frac{p}{4} + pk$

$k = 0 \rightarrow x = \frac{p}{4} \rightarrow A(\frac{p}{4}, 1)$

תשובה: $A(\frac{p}{4}, 1)$

ב. השטח הוא שטח פשוט

נכין טבלה לסיוע בחישוב השטח

פונקציה עליונה	$y=1$
פונקציה תחתונה	$y=\sin 2x$
x **גדול**	$x=\frac{\pi}{4}$
x **קטן**	$x=0$

נחשב את השטח המבוקש

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2x)dx==x+\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S=(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2})-(0+\frac{\cos 0}{2})=$$

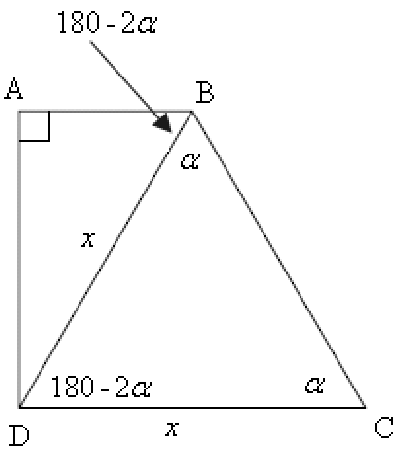
$$S=(\frac{\pi}{4}+0)-(0+0.5)$$

$$\boxed{S=\frac{\pi}{4}-0.5}$$

תשובה: $\frac{\pi}{4}-0.5$

.2

<u>נעלה את השרטוט המתאים:</u>



א. נתחיל בהשלמת זוויות נדרשות

$\angle BCD = \alpha$ **(נתון)** $DB = DC$ **(נתון)**

$\angle CBD = \alpha$ **(זוויות בבסיס שווֹת במש"ש** ΔBDC**)** $\angle CDB = 180 - 2\alpha$ **(סכו זוויות ב-** ΔBDC **הוא** $180°$**)**

$DB \parallel DC$ **(בסיסי הטרפז מקבילים זה לזה)**

$\angle ABD = 180 - 2\alpha$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)**

$$\leftarrow H_1 = H_2 \quad \frac{AB}{DC} = \frac{\frac{AB \cdot H_1}{2}}{\frac{DC \cdot H_2}{2}} = \frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta BDC}}$$ **(** $H_1 = H_2$ **כי מרחקים שווים בין מקבילים)**

נסמן: $DC = x$ **, לכן** $BD = x$ **(משולש שווה שוקיים)**

ΔABD **ישר זווית (נתון טרפז ישר זווית)**

$\underline{\Delta ABD}$

$$\cos(180° - 2\alpha) = \frac{AB}{BD}$$

$$\boxed{AB = -x\cos 2\alpha} \qquad \leftarrow \cos x = -\cos(180° - x)$$

$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{AB}{DC} = \frac{-x\cos 2\alpha}{x}$$

$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta BDC}} = -\cos 2\alpha$$

תשובה: $-\cos 2\alpha$

ב. אם $\alpha = 60°$ **אז** ΔBDC **שווה צלעות והגובה** BE **הוא גם תיכון**

לכן $CD = 2 \cdot DE$**, ובהתאם:** $CD = 2 \cdot AB$ **והיחס המבוקש הוא** $\frac{1}{2}$

תשובה: $\frac{1}{2}$

.3

$f(t)=K\cdot a^t$ **,**

כאשר K **- הכמות ההתחלתית**

a **הוא גורם הגידול,** $f(t)$ **הכמות לאחר זמן** t**..**

א. נחשב את גורם הגידול.

נתון זמן מחצית החיים - 35 **שנה.**

ניתן למצוא את גורם הגידול ללא שימוש בכמות התחילית.

נתון: $t=35$ **,** $f(t)=0.5k$

נציב בנוסחה

$$0.5k=k\cdot a^{35}$$

$$0.5=a^{35}$$

$$\sqrt[35]{0.5}=a$$

$$\boxed{a=0.980390609}$$

עדיף לשמור כמה שיותר ספרות לאחר הנקודה – כדי למנוע הצטברות טעויות בתקופות זמן ארוכות

יש למצוא את הכמות לאחר 40 **שנה, כלומר:**

נתון: $t=40$ **,** $a=0.980390609$ **,** $K=2000$

$$f(40)=2000\cdot 0.980390609^{40}$$

$$\boxed{f(40)=905.72}$$

תשובה: לאחר 40 **שנה ייש‏ארו** 905.72 **גרם חומר רדיואקטיבי.**

ב. יש למצוא לאחר כמה שנים יישארו 550 **גרם חומר רדיואקטיבי**

נתון: $K=2000$ **ו-** $f(t)=550$ **,** $a=0.980390609$

$$550=2000\cdot 0.980390609^{t}$$

$$0.275=0.980390609^{t}$$

$$\ln 0.275=\ln 0.980390609^{t}$$

$$\ln 0.275=t\ln 0.980390609$$

$$\frac{\ln 0.275}{\ln 0.980390609}=t$$

$$\boxed{t=65.19}$$

תשבה: לאחר 65.19 **שנים יישארו** 550 **גרם חומר רדיואקטיבי.**

4.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+m}{e^{x^2}}$ **, כאשר לפונקציה קיצון עבור** $x=1$

לכן: $f'(1)=0$

$$\boxed{f(x)=\frac{x+m}{e^{x^2}}}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^{x^2}-2x(x+m)e^{x^2}}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-2x(x+m)}{e^{x^2}}$$

$$0=\frac{1-2\cdot 1(1+m)}{e^{1^2}}$$

$$0=1-2-2m$$

$$2m=-1$$

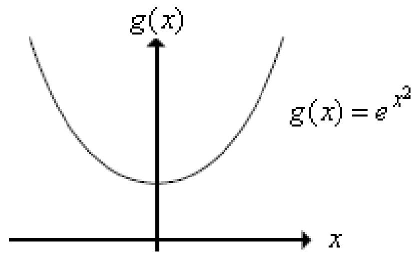
$$\boxed{m=-0.5}$$

תשובה: $m=-0.5$

ב. לאחר מציאת ערך הפרמטר – הפונקציה היא: $f(x)=\frac{x-0.5}{e^{x^2}}$

הפונקציה מוגדרת לכל x **מכיוון ו-** $g(x)=e^{x^2}$ **חיובית לכל** x

זה הגרף המראה את המכנה של הפונקציה הנתונה: (לא נדרש לציירו)



ד. <u>נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר</u> ה- x $y=0$

$$0=\frac{x-0.5}{e^{x^2}}\quad\rightarrow(0.5,0)$$

<u>נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר</u> ה- y $x=0$

$$f(x)=\frac{0-0.5}{e^{0^2}}\quad\rightarrow(0,-0.5)$$

תשובה: נקודות החיתוך עם הצירים: $(0.5,0)$ **,** $(0,-0.5)$

ג. נמצא את נקודות הקיצון (אם ישנם) ואת סוגן :

$$\boxed{f(x)=\frac{x-0.5}{e^{x^2}}}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^{x^2}-2x(x-0.5)e^{x^2}}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-2x(x-0.5)}{e^{x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x^2+x+1}{e^{x^2}}}$$

$$0=\frac{-2x^2+x+1}{e^{x^2}}$$

$$0=-2x^2+x+1$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{-4}$$

$$\boxed{x_1=1}\quad \boxed{x_2=-0.5}$$

$$f(1)=\frac{1-0.5}{e^{1^2}}=\frac{1}{2e}\quad\rightarrow(1,\frac{1}{2e})\quad f(-0.5)=\frac{-0.5-0.5}{e^{(-0.5)^2}}=-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\quad\rightarrow(1,-\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$$

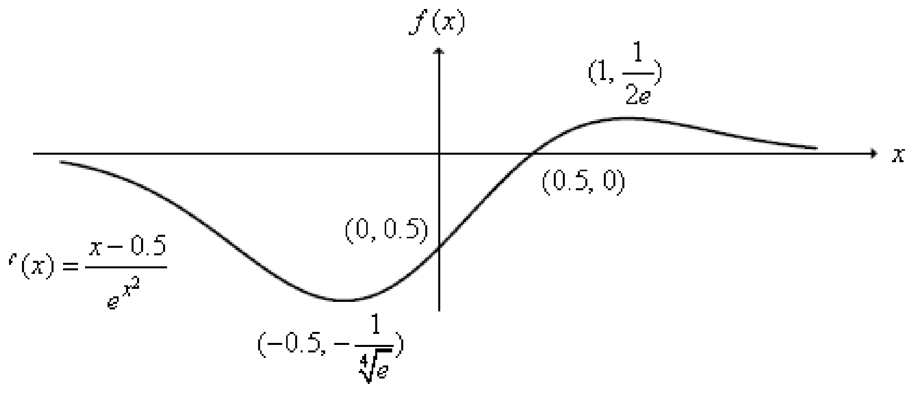
נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(-1)=-2\cdot(-1)^2-1+1<0,\quad f'(0)=-2\cdot0^2-0+1>0,\quad f'(2)=-2\cdot2^2-2+1<0$$

x	2	1	0	-0.5	-1
y'	-	0	+	0	-
מסקנה	↘	**Max**	↗	**Min**	↘

תשובה: $(1,\frac{1}{2e})$ **מקסימום , ** $(-0.5,-\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$ **מינימום.**

ה. הסקיצה המתאימה



נכתב ע"י עפר ילין

.5

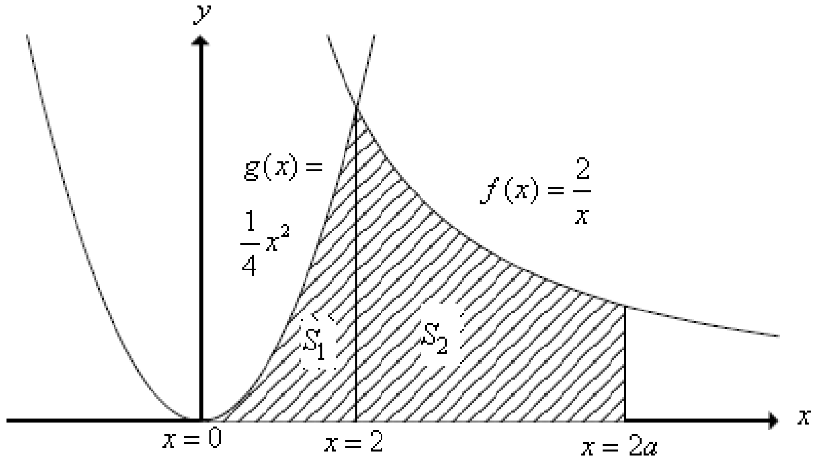
נשווה את הפונקציות למציאת נקודת חיתוך:

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{4}x^2$$

$$8=x^3$$

$$\boxed{x=2}$$

נתון כי $a>1$, לכן $2a>2$ והישר $x=2a$ מימין לנקודת החיתוך בין הפונקציות



ג. נכין טבלה לסיוע בחישוב השטחים

	S_2	S_1
פונקציה עליונה	$f(x)=\frac{2}{x}$	$g(x)=\frac{1}{4}x^2$
פונקציה תחתונה	$y=0$	$y=0$
x גדול	$x=2a$	$x=2$
x קטן	$x=2$	$x=0$

נחשב את שני השטחים ולאחר מכן את סכומם

$$S_2 = \int_2^{2a} (\frac{2}{x} - 0)dx = 2\ln|x| \Big]_2^{2a}$$

$$S_2 = 2\ln 2a - 2\ln 2 =$$

$$S_2 = 2\ln 2 + 2\ln a - 2\ln 2 =$$

$$\boxed{S_2 = 2\ln a}$$

$$S_1 = \int_0^2 (\frac{1}{4}x^2 - 0)dx = \frac{x^3}{12}\Big]_0^2$$

$$S_1 = \frac{2^3}{12} - \frac{0^3}{12} =$$

$$\boxed{S_1 = \frac{2}{3}}$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$\boxed{S = \frac{2}{3} + 2\ln a}$$

נתון: $S = \frac{8}{3}$, **ובהתאם:**

$$\frac{2}{3} + 2\ln a = \frac{8}{3}$$

$$2\ln a = 2$$

$$\ln a = 1$$

$$\boxed{a = e}$$

תשובה: $a = e$