1.

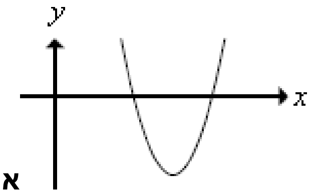
נתונה הפונקציה $y = mx^2 - (2m+1)x + m + 2$

א. (1) יש למצוא עבור אילו ערכי m **שתי נקודות חיתוך שונות עם ציר ה-** x

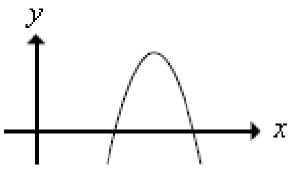
$a = m \quad b = -(2m+1) \quad c = m+2$

יש לבדוק אפשרות של שתי נקודות חיתוך שונות עם ציר ה- x

ובהתאם אפשרי גרף של פרבולה, בעלת מינימום או בעלת מקסימום, כדוגמת:



או



התנאים הנדרשים הם: $\Delta > 0$ **(שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-**x**)**

$a \neq 0$ **(גרף של פרבולה)**

$\underline{\Delta > 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$(-(2m+1))^2 - 4 \cdot m \cdot (m+2) > 0$

$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8m > 0$

$1 - 4m > 0$

$1 > 4m$

$\boxed{m < 0.25}$

$a \neq 0$ **, כלומר** $m \neq 0$

לכן תשובה משותפת לשני התנאים: $m < 0.25, \quad m \neq 0$ **.**

(2) נדרש למצוא לאילו ערכי m **יש לפונקציה נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-**x

<u>מקרה הפרבולה (גרף של פונקציה ממעלה שנייה)</u>

התנאים הנדרשים הם: $\Delta = 0$ **(שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-**x**), כלומר:** $m = 0.25$

$a \neq 0$ **(גרף של פרבולה), כלומר:** $m \neq 0$

ובהתאם: $m = 0.25$

<u>מקרה הישר (גרף של פונקציה ממעלה ראשונה)</u>

$a = 0$ **, כלומר** $m = 0$

נציב $m = 0$ **, ונקבל:** $y = 0 \cdot x^2 - (2 \cdot 0 + 1)x + 0 + 2 \quad y = -x + 2$ **,**

כלומר ישר יורד שיש לו חיתוך עם ציר ה- x $(2, 0)$

לכן, $m = 0$ **עונה לתנאי השאלה**

תשובה מאוחדת: $m = 0.25$ **או** $m = 0$

ב. יש למצוא האם גרף הפונקציה יכול לחתוך את ציר ה- x **בנקודה שבה** $x = 1$ **.**

תשובה: לא, גרף הפונקציה עובר תמיד דרך הנקודה $(1,1)$ **ולכן לא דרך** $(1,0)$

א. הסדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 2n + 4 - a_n \end{cases}$$

יש להוכיח כי $a_{n+2} - a_n = 2$

נפעיל פעמיים את כלל הנסיגה:

$$a_{n+2} = 2(n+1) + 4 - a_{n+1}$$
$$a_{n+2} = 2n + 2 + 4 - (2n + 4 - a_n)$$
$$a_{n+2} = 2n + 6 - 2n - 4 + a_n$$
$$\boxed{a_{n+2} - a_n = 2}$$

הוכח

ב. כלומר ההפרש בין כל זוג איברים עם דילוג ביניהם, לא תלוי ב- n.

כלומר סדרת האיברים הזוגיים היא סדרה חשבונית עם $d = 2$

וגם סדרת האיברים האי-זוגיים היא סדרה חשבונית עם $d = 2$ **ובה** $a_1 = -2$

נמצא את a_2 **באמצעות כלל הנסיגה:**

$$a_2 = 2 \cdot 1 + 4 - a_1$$
$$a_2 = 6 - (-2)$$
$$\boxed{a_2 = 8}$$

תשובה: $a_2 = 8$

ג. יש למצוא את סכום 200 **האיברים הראשונים בסדרה**

כלומר סדרת האיברים הזוגיים היא סדרה חשבונית עם $d = 2$ **ובה** $a_1 = 8$

וגם סדרת האיברים האי-זוגיים היא סדרה חשבונית עם $d = 2$ **ובה** $a_1 = -2$

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$$

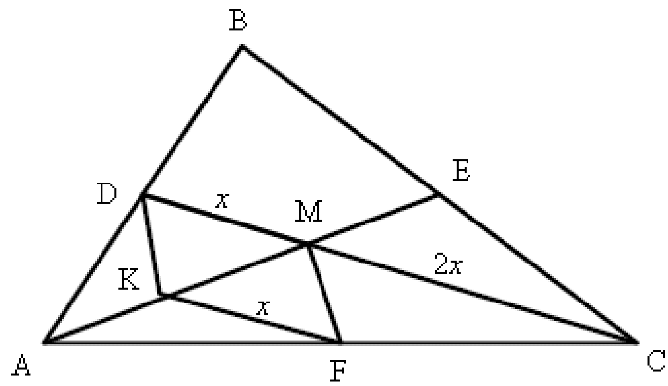
סכום 100 **האיברים במקומות האי-זוגיים:** $S_{100} = \frac{100}{2}(2 \cdot (-2) + 2(100-1)) = 9,700$

סכום 100 **האיברים במקומות הזוגיים:** $S_{100} = \frac{100}{2}(2 \cdot 8 + 2(100-1)) = 10,700$

תשובה: סכום 200 **האיברים הראשונים בסדרה:** $20,400$

.3

להלן הציור המתאים והסברים בהמשך.



<u>נתונים</u>

.1 AE **תיכון לצלע** BC

.2 CD **תיכון לצלע** AB

.3 K **אמצע** AM

.4 $KF \parallel DC$ $2x$ x

צ"ל:

א. $2KF = MC$

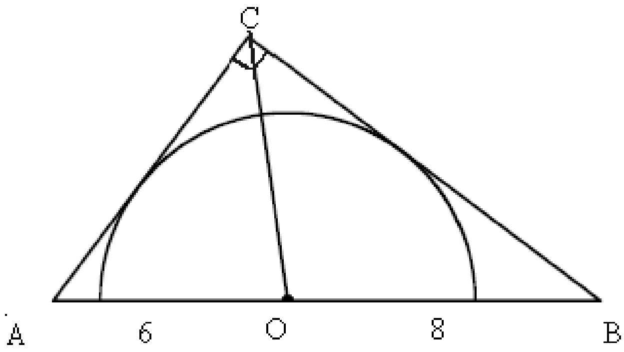
ב. המרובע $DKFM$ **הוא מקבילית**

<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
נראה כי KF **קטע אמצעים ב-** ΔAMC			
3	5	K **אמצע** AM	נתון
4	6	$KF \parallel DC$	נתון
6	7	$KF \parallel MC$	חלקים מישרים מקבילים – מקבילים ביניהם
5,7	8	KF **קטע אמצעים ב-** ΔAMC	יוצא מאמצע צלע ומקביל לשלישית
5,6,7	9	$2KF = MC$	נתון
מ.ש.ל. א			
2	10	CD **תיכון לצלע** AB	ז.מ.ב.ח + סימון
1	11	AE **תיכון לצלע** BC	זוויות הריבוע ישרות
10,11	12	$2DM = MC$	תיכונים ב- ΔABC חותכים זה את זה ביחס $2:1$
9,12	13	$KF = DM$	כלל המעבר
6	14	$KF \parallel DM$	חלקים מישרים מקבילים – מקבילים ביניהם
13,14	15	**המרובע** $DKFM$ **הוא מקבילית**	זוג צלעות נגדיות שווה ומקביל

הסבר		טענה	נימוק
מ.ש.ל. ב			

.4



<u>נתונים</u>

.1 **R**ACB = 90°

.2 AC **ו-** BC **משיקים למעגל**

.3 O **מרכז המעגל**

עבור ב'

.4 AO = 6 **ס"מ**

.5 BO = 8 **ס"מ**

צ"ל:

א. CO **חוצה** **R**ACB

ב. היחס $\frac{AC}{BC}$

ג. אורכי הצלעות AC, BC

<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
מרכז מעגל חסום במשולש (או מרובע) הוא מפגש חוצי זוויות			
2	5	AC, BC משיקים למעגל	נתון
3	6	O מרכז המעגל	נתון
5,6	7	CO חוצה $\angle ACB$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני משיקים למעגל, אז הישר המחבר את הנקודה למרכז המעגל חוצה את הזווית שבין המשיקים
מ.ש.ל. א			
7	8	$\frac{AC}{BC}=\frac{AO}{BO}$	משפט חוצה זווית ב- ΔABC
4	9	$AO =$ 6 ס"מ	נתון
5	10	$BO =$ 8 ס"מ	נתון
8,9,10	11	$\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$	הצבה וחישוב
מ.ש.ל. ב (1)			
	12	$AC=3x$	סימון
11,12	13	$BC=4x$	הצבה וחישוב
1	14	$\angle ACB=90°$	נתון
14	15	$AB^2=AC^2+BC^2$	משפט פיתגורס ΔABC
9,10	16	$AB =$ 14 ס"מ	סכום קטעים
12,13, 15,16	17	$14^2=(3x)^2+(4x)^2$ $196=9x^2+16x^2$ $196=25x^2$ $x=\frac{14}{5}$ $x=2.8$	הצבה וחישוב
12,17	18	$AC =$ 8.4 ס"מ	הצבה וחישוב
13,17	19	$BC =$ 11.2 ס"מ	הצבה וחישוב
מ.ש.ל. ב (2)			

.5

א. נגדיר את המאורעות המתאימים:

A **- דוברי עברית**

$\overline{A}$ **- לא דוברי עברית**

B **- אזרח ארה"ב (לסעיף ג')**

$\overline{B}$ **- לא אזרח ארה"ב (לסעיף ג')**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

ההסתברות שבדיוק 3 **מתוך** 3 **אורחים הם דוברי עברית שווה ל-** 0.027

יש כאן התפלגות בינומית.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

כאשר $p_3(3)=0.027 \quad k=3 \quad n=3$ **,**

לכן,

$$0.027=\binom{3}{3}(p)^3(1-p)^{3-3}$$

$$0.027=\frac{3!}{3!(3-3)!}(p)^3(1-p)^0$$

$$0.027=1\cdot(p)^3\cdot 1$$

$$\boxed{p=0.3}$$

כלומר, $P(A)=0.3 \quad \rightarrow P(\overline{A})=0.7$

תשובה: ההסתברות שהתייר אינו דובר עברית היא 0.7

ב. ההסתברות למאורע שמתוך 7 אורחים לפחות אחד דובר עברית.

נחשב את ההסתברות למאורע המשלים – אפס דוברי עברית

יש כאן התפלגות בינומית.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי $P(k)=\binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

כאשר $p=0.3 \quad k=0 \quad n=7$ **,**

לכן,

$$P_7(0)=\binom{7}{0}(0.3)^0(1-0.3)^{7-0}$$

$$P_7(0)=\frac{7!}{0!(7-0)!}\cdot 1\cdot 0.7^7$$

$$P_7(0)=0.7^7$$

$$\boxed{P_7(0)=0.0823543}$$

ולכן ההסתברות המבוקשת: $1-0.0823543-0.918$

תשובה: 0.918

ג. ידוע גם שבאותו בית מלון 0.4 **מכלל האורחים הם אזרחי ארצות-הברית**

$\frac{1}{3}$ **מהאורחים דוברי העברית הם אזרחי ארצות-הברית**

$$P(B)=0.4 \quad \to P(\overline{B})=0.6$$

$$P(B/A)=\frac{1}{3} \quad \to P(\overline{B}/A)=\frac{2}{3}$$

נפתח באמצעות נוסחת ההסתברות המותנית

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{P(B\cap A)}{0.3}$$

$$P(B\cap A)=0.1$$

ההסתברות שדובר עברית כאשר ידוע שאזרח ארה"ב

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.4}=0.25$$

תשובה: 0.25

6.

א. נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - **קבוצת הסטודנטים שלמדו בקורס באוניברסיטה**

A - **קבוצת הסטודנטים שקיבלו שיעורי תגבור**

$\overline{A}$ - **קבוצת הסטודנטים שלא קיבלו שיעורי תגבור**

B - **קבוצת הסטודנטים שהצליחו במבחן**

$\overline{B}$ - **קבוצת הסטודנטים שלא הצליחו במבחן**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$N(S) = 150 \quad , \quad N(A) = 90$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{90}{150} = 0.6 \quad \rightarrow P(\overline{A}) = 0.4$$

$$P(B/\overline{A}) = 0.7 \quad \rightarrow P(\overline{B}/\overline{A}) = 0.3$$

$$P(A/B) = 0.6 \quad \rightarrow P(\overline{A}/B) = 0.4$$

<u>פיתוח נוסחאות פרופורציה מותנית</u>

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.7 = \frac{P(B \cap \overline{A})}{0.4}$$

$$P(B \cap \overline{A}) = 0.28$$

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$0.4 = \frac{0.28}{P(B)}$$

$$P(B) = 0.7$$

תשובה: 70% **מהסטודנטים בקורס הצליחו במבחן**

	תוגברו A	לא תוגברו $\bar{A}$	
B - הצליחו	0.42	0.28	0.7
$\bar{B}$ - לא הצליחו	0.18	0.12	0.3
	0.6	0.4	1

פרופורציית התלמידים שהצליחו במבחן, מבין אלו שהשתתפו בשיעורי התגבור

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.42}{0.6}=0.7$$

תשובה: 70% **מהסטודנטים שהשתתפו בשיעורי התגבור הצליחו במבחן**

ג. מתקבל ש: $P(A/B)=P(A)$ **– הרי שאין קשר סטטיסטי**

לכן, לא ניתן להסיק מהנתונים ששיעורי התגבור מגדילים את הסיכוי להצליח בבחינה.