

א. נמצא את נקודות הקיצון

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin^2 x - 4 \sin x$

הפונקציה מוגדרת בתחום פתוח $0 < x < 2p$,

נמצא נקודות קיצון פנימיות:

$$f(x) = \sin^2 x - 4 \sin x$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 4 \cos x$$

$$0 = 2 \sin x \cos x - 4 \cos x$$

$$0 = 2 \cos x (\sin x - 2)$$

$$\cos x = 0$$

$$\sin x = 2$$

$$x = \frac{p}{2} + pk$$

\emptyset

k	$x = \frac{p}{2} + pk$	
0	$x = \frac{p}{2}$	$(\frac{p}{2}, -3)$
1	$x = \frac{3p}{2}$	$(\frac{3p}{2}, 5)$

$$x = \frac{p}{2} \rightarrow f\left(\frac{p}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{p}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{p}{2}\right) = 1 - 4 = -3$$

$$x = \frac{3p}{2} \rightarrow f\left(\frac{3p}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{3p}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{3p}{2}\right) = 1 - 4(-1) = 5$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 4 \cos x$$

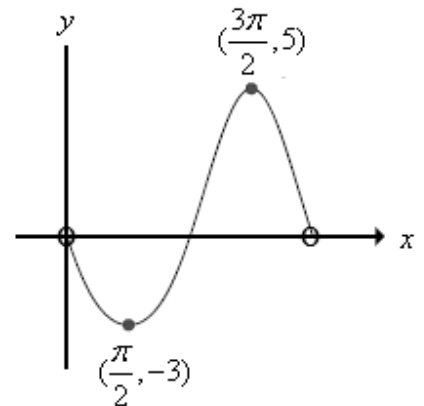
$$f'(x) = \sin 2x - 4 \cos x$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x + 4 \sin x$$

$$f''\left(\frac{p}{2}\right) = 2 \cos 2 \cdot \frac{p}{2} + 4 \sin \frac{p}{2} = -2 + 4 = 2 > 0 \rightarrow \text{min}$$

$$f''\left(\frac{3p}{2}\right) = 2 \cos 2 \cdot \frac{3p}{2} + 4 \sin \frac{3p}{2} = 0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow \text{max}$$

נעלה סקיצה מתאימה, בהתאם לנקודות שקבלנו, במטרה להמחיש מה סוגן של נקודות הקיצון



תשובה: $(\frac{3p}{2}, 5)$ מקסימום מקומי ומוחלט, $(\frac{p}{2}, -3)$ מינימום מקומי ומוחלט

ב. נמצא את משוואות המשיקים

בנקודות קיצון פנימיות, המשיק מקביל לציר ה- x ,

ולכן המשוואות הן: $y = 5$ ו- $y = -3$

תשובה: $y = 5$ ו- $y = -3$

ג. נמצא את נקודת החיתוך הנדרשות

נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר $y = -1\frac{3}{4}$ בתחום הנתון

$$\sin^2 x - 4\sin x = -1\frac{3}{4}$$

$$4\sin^2 x - 16\sin x + 7 = 0$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{16 \pm 12}{8}$$

$$\sin x = 0.5$$

$$\sin x = 3.5$$

$$x = \frac{p}{6} + 2pk$$

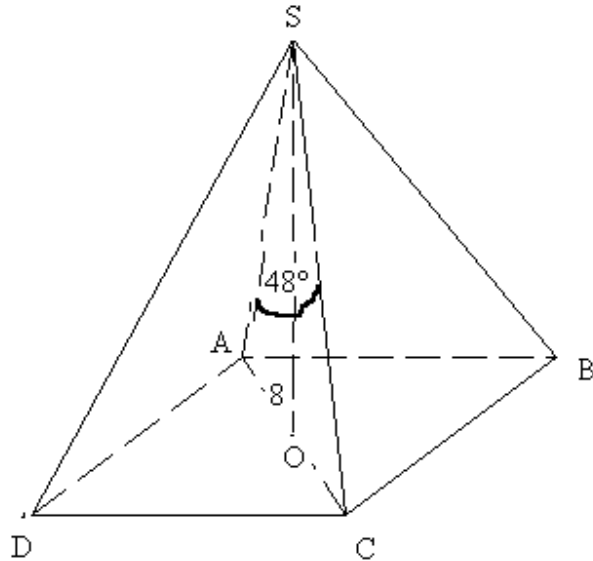
\emptyset

$$x = \frac{5p}{6} + 2pk$$

k	$x = \frac{p}{6} + 2pk$	$x = \frac{5p}{6} + 2pk$
0	$x = \frac{p}{6}$ $(\frac{p}{6}, -1\frac{3}{4})$	$x = \frac{5p}{6}$ $(\frac{5p}{6}, -1\frac{3}{4})$

תשובה: $(\frac{5p}{6}, -1\frac{3}{4}), (\frac{p}{6}, -1\frac{3}{4})$

נעלה את הנתונים והפתרונות על תרשים הפירמידה ונסביר



א. בסיס הפירמידה הוא ריבוע שכל זוויותיו ישרות.

מקצועות הפירמידה הישרה שווים זה לזה - לכן, ΔSAC שווה שוקיים.

O מפגש אלכסוני הריבוע, החוצים זה את זה,

ולכן SO הוא תיכון במש"ש ובהתאם גם גובה לבסיס וחוצה זווית הראש.

נמצא את DO אורך חצי האלכסון

ΔSAO

$$\tan 24^\circ = \frac{AO}{8}$$

$$AO = 8 \tan 24^\circ$$

$$\boxed{AO = 3.5618}$$

נמצא את שטח בסיס הריבוע, שאלכסוניו מאונכים זה לזה

ובהתאם שטחו שווה למחצית מכפלת האלכסונים

$$S_{ABCD} = \frac{(2 \cdot 3.5618)^2}{2}$$

$$\boxed{S_{ABCD} = 25.3733}$$

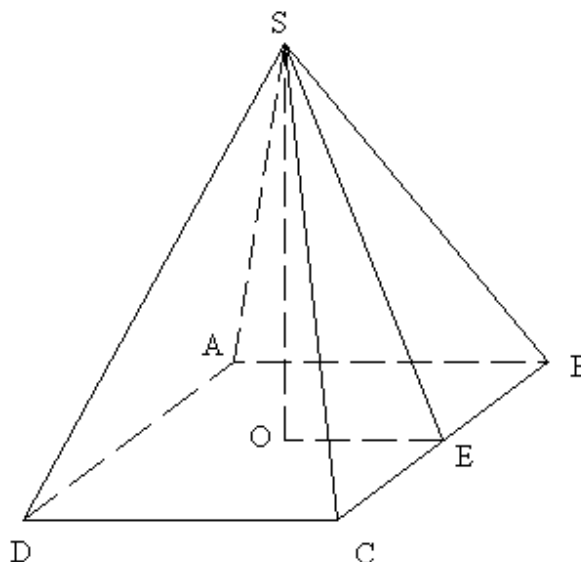
ולכן B שטח הבסיס: 25.3733 סמ"ר

$$V = \frac{BH}{3} \text{ נפח פירמידה:}$$

$$V = \frac{25.3733 \cdot 8}{3} = 67.66 \text{ :- נפח הפירמידה}$$

תשובה: נפח הפירמידה 67.66 סמ"ק

ב. הזווית שבין הפאה הצדדית SBC לבסיס
 היא הזווית שבין שני אנכים לישר החיתוך BC
 כלומר הזווית בין OE ל- SE



כאשר זווית $\angle SOE = 90^\circ$ (גובה הפירמידה מאונך לבסיס)
 ו- OE קטע אמצעים במשולש BDC ושווה למחצית DC

משפט פיתגורס:

$\triangle DOC$

$$DC^2 = 3.5618^2 + 3.5618^2$$

$$\boxed{DC = 5.037}$$

$$\boxed{OE = 2.519}$$

$\triangle SOE$

$$\tan \angle RSEO = \frac{8}{2.519}$$

$$\tan \angle RSEO = 3.1764$$

$$\boxed{\angle RSEO = 72.52^\circ}$$

תשובה: הזווית שבין פאה לבסיס היא 72.52°

$$, f(t) = K \cdot a^t$$

כאשר K - הכמות ההתחלתית

a הוא גורם הגידול, $f(t)$ הכמות לאחר זמן t ..

א. נחשב את גורם הגידול.

בתחילה היו בבריכה 1200 מ"ק מים, לכן $K = 1200$.

לאחר 10 שעות נותרו בבריכה 719 מ"ק מים, לכן $t = 10$ ו- $f(10) = 719$

נציב בנוסחה:

$$719 = 1200 \cdot a^{10}$$

$$0.5991666 = a^{10}$$

$$\sqrt[10]{0.5991666} = a$$

$$\boxed{a = 0.95}$$

כלומר כל שעה נגרעים מהבריכה 5% מכמות המים שבה.

נבדוק מה כמות המים לאחר שעתיים

נתון: $t = 2$, $a = 0.95$, $K = 1200$

$$f(2) = 1200 \cdot 0.95^2$$

$$f(2) = 1083$$

ובהתאם כמות המים שיצאה מהבריכה: $1200 - 1083 = 117$

תשובה: 117 מ"ק מים

ב. בסעיף זה מבקשים למעשה למצוא את זמן מחצית החיים:

ניתן למצוא אותו ללא שימוש בכמות התחילית.

נתון: $a = 0.95$, $f(t) = 0.5k$

נציב בנוסחה

$$0.5K = K \cdot 0.95^t$$

$$0.5 = 0.95^t$$

$$\ln 0.5 = \ln 0.95^t$$

$$\ln 0.5 = t \ln 0.95$$

$$\frac{\ln 0.5}{\ln 0.95} = t$$

$$\boxed{t = 13.51}$$

תשובה: לאחר 13.51 שעות תתרוקן מחצית מכמות המים בבריכה.

א. נתונה הפונקציה $y = \frac{ae^x}{x+1}$ העוברת בנקודה $(1, 2e)$.

נציב את שיעורי הנקודה בתבנית הפונקציה:

$$2e = \frac{ae^1}{1+1}$$

$$4e = ae$$

$$\boxed{a = 4}$$

תשובה: $a = 4$

ב. לאחר מציאת ערך הפרמטר – הפונקציה היא: $y = \frac{4e^x}{x+1}$

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס, לכן $x \neq -1$

תשובה: $x \neq -1$ (הערה, $x = 1$ היא משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה)

ג. נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x $y = 0$
המונה חיובי לכל x ולכן אין חיתוך עם ציר x

נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y $x = 0$

$$f(0) = \frac{4e^0}{0+1} = 4$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- y - $(0, 4)$

ד. נמצא את נקודות הקיצון (אם ישנם) ואת סוגן, לקביעת תחומי עלייה וירידה

$$\boxed{f(x) = \frac{4e^x}{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x(x+1) - 4e^x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x(x+1-1)}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4xe^x}{(x+1)^2}}$$

$$0 = \frac{4xe^x}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{x = 0}$$

ובהתאם $(0, 4)$ חשודה כקיצון

סימן הנגזרת הראשונה נקבע ע"י x , שכן שאר הכופלים חיוביים.

לכן, הפונקציה עולה עבור $x > 0$ ויורדת עבור $x < 0$, $x \neq -1$

(מסקנה: (0, 4) נקודת מינימום)

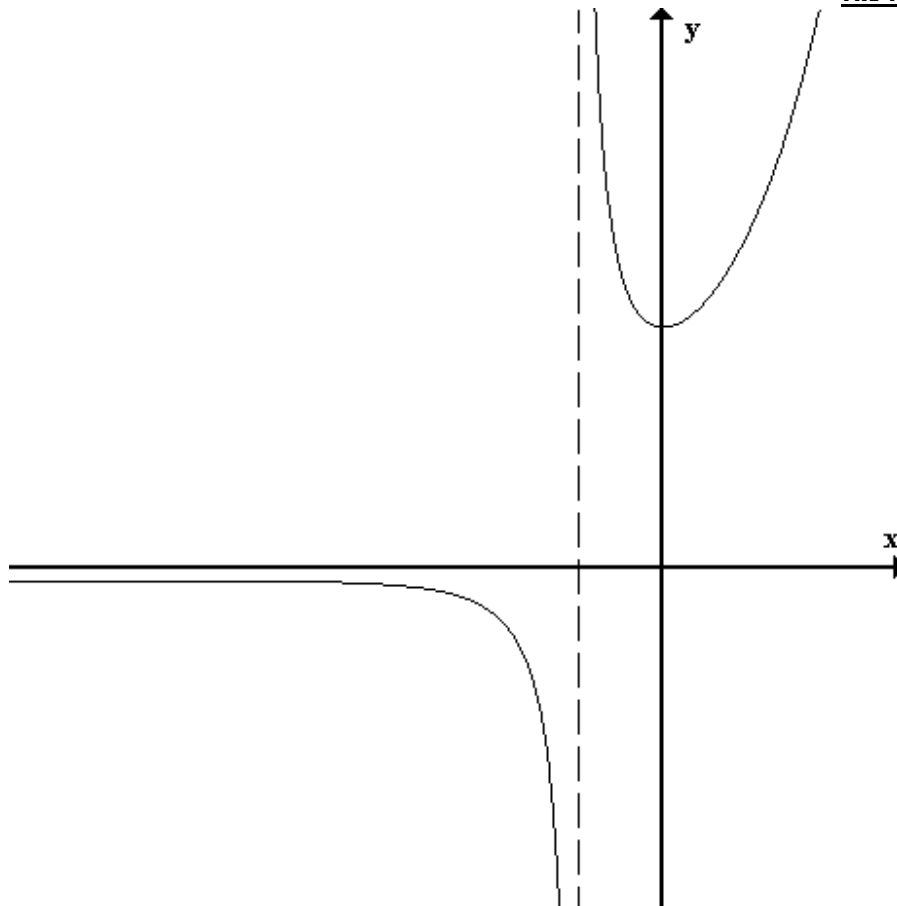
תשובה: הפונקציה עולה עבור $x > 0$ ויורדת עבור $x < 0$, $x \neq -1$.

ה. סימני הפונקציה $y = \frac{4e^x}{x+1}$ נקבעים על פי המכנה, שכן המונה חיובי

בהתאם: $x+1 > 0 \rightarrow x > -1$

לכן הפונקציה חיובית לכל $x > -1$ ושלילית עבור $x < -1$

ו. הסקיצה המתאימה



א. ניתן לראות שכאשר ערכי x גדלים המכנה של $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ הולך וגדל

ובהתאם ערכי $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ יקטנו והפונקציה יורדת לכל x ומתאימה לעקומה II.

עבור $0 < x < 2$ המכנה של $g(x) = \frac{1}{2-x}$ יקטן כאשר ערכי x גדלים,

ובהתאם $g(x) = \frac{1}{2-x}$ עולה בתחום זה ומתאימה לעקומה I.

תשובה: עקומה I - $g(x) = \frac{1}{2-x}$, עקומה II - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ב. נשווה את הפונקציות למציאת נקודת חיתוך:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2-x}$$

$$2-x = \sqrt{x}$$

$$(2-x)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$4 - 4x + x^2 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1, 4$$

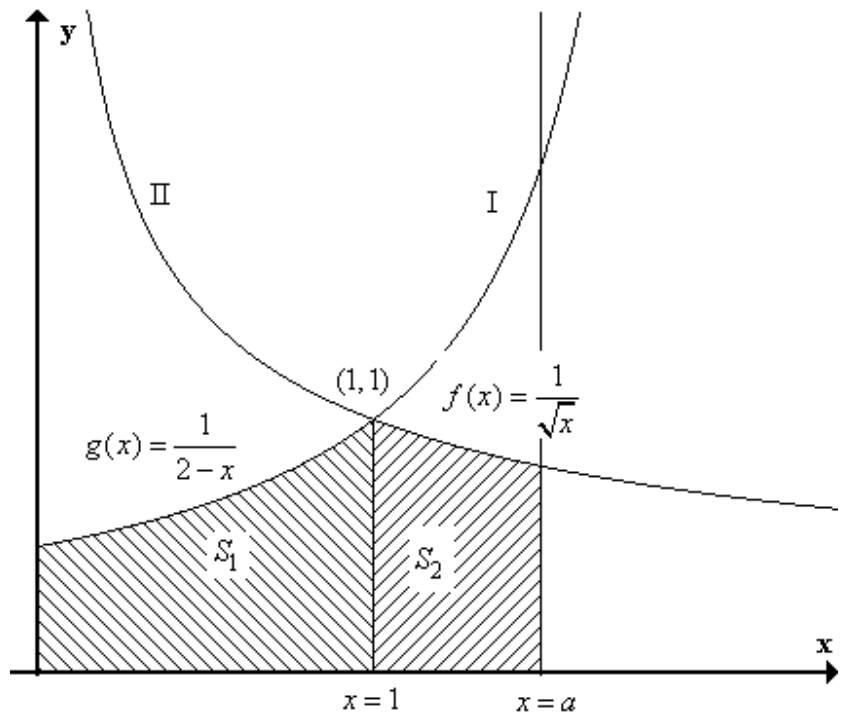
מכיוון וזו משוואה אי-רציונאלית, יש לבדוק האם יש פתרונות זרים:

$$\text{ובהתאם } x=1 \text{ פתרון של המשוואה. } \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2-1} \rightarrow 1=1$$

$$\text{ובהתאם } x=4 \text{ פתרון זר שנפסל. } \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2-4} \rightarrow \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

$$\text{נמצא את שיעורי נקודת החיתוך: } f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

תשובה: (1, 1)



ג. נכין טבלה לסיוע בחישוב השטחים

S_1	S_2	
$g(x) = \frac{1}{2-x}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	פונקציה עליונה
$y = 0$	$y = 0$	פונקציה תחתונה
$x = 1$	$x = a$	גדול x
$x = 0$	$x = 1$	קטן x

נחשב את שני השטחים ולאחר מכן את סכומם

$$S_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} - 0 \right) dx = \left. \frac{\ln|2-x|}{-1} \right|_0^1$$

$$S_1 = \frac{\ln|2-1|}{-1} - \frac{\ln|2-0|}{-1} =$$

$$S_1 = -\ln|1| + \ln|2| =$$

$$\boxed{S_1 = \ln 2}$$

$$S_2 = \int_1^a \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right) dx = \left. 2\sqrt{x} \right|_1^a$$

$$S_2 = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{1} =$$

$$\boxed{S_2 = 2\sqrt{a} - 2}$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$\boxed{S = \ln 2 + 2\sqrt{a} - 2}$$

תשובה: $S = \ln 2 + 2\sqrt{a} - 2$

ד. נתון: $S = \ln 2 + 0.4$, **ובהתאם:**

$$\ln 2 + 2\sqrt{a} - 2 = \ln 2 + 0.4$$

$$2\sqrt{a} = 2.4$$

$$\sqrt{a} = 1.2$$

$$a = 1.44$$

תשובה: $a = 1.44$