א.(1) נתונה המשוואה: $\mathrm{I}: \quad t^2(2-x)=25+t(5x+t)$

נמצא עבור אילו ערכים של t **יש למשוואה** I **פתרון יחיד, קטן מ-** 0.

$$t^2(2-x)=25+t(5x+t)$$
$$2t^2-t^2x=25+5tx+t^2$$
$$-t^2x-5tx=25-t^2$$
$$-(t^2+5t)x=25-t^2 \quad /:-(-1)$$
$$t(t+5)x=(t-5)(t+5)$$

כאשר $t=0$ **נקבל** $0x=25$ **שהוא פסוק שקר, ואין פתרון.**

כאשר $t=-5$ **נקבל** $0x=0$ **שהוא פסוק אמת, ויש אין-סוף פתרונות**

עבור $t\neq-5, t\neq0$**, יתקבל פתרון יחיד**

$$t(t+5)x=(t-5)(t+5)/:t(t+5)$$

$$\boxed{x=\frac{t-5}{t}, \quad t\neq-5, t\neq0}$$

נמצא לאילו ערכי t **הפתרון שלילי** **(<u>הערה – סעיף זה ירד מתוכנית הלימודים למעט חדו"א וסדרות</u>)**

$$\frac{t-5}{t}<0 \quad /\cdot t^2$$
$$t(t-5)<0$$

מתקבל ביטוי ריבועי, עם גרף של פרבולה בעלת מינימום (ישרה, שמחה)

כאשר ערכיו שליליים עבור $0<t<5$ **, גם בהתחשבות בתנאי לפתרון יחיד** $t\neq-5, t\neq0$

תשובה: עבור $0<t<5$ **יש למשוואה** I **פתרון יחיד, קטן מ-** 0 **.**

(2) נתונה המשוואה $\mathrm{II}: \quad m^2(x-1)+m(x+1)-6x+2=0$

נמצא עבור אילו ערכים של m **יש למשוואה** II **פתרון יחיד**

$$m^2(x-1)+m(x+1)-6x+2=0$$
$$m^2x-m^2+mx+m-6x+2=0$$
$$(m^2+m-6)x=m^2-m-2$$
$$(m+3)(m-2)x=(m-2)(m+1)$$

כאשר $m=-3$ **נקבל** $0x=10$ **שהוא פסוק שקר, ואין פתרון.**

כאשר $m=2$ **נקבל** $0x=0$ **שהוא פסוק אמת, ויש אין-סוף פתרונות.**

תשובה: עבור $m\neq-3, m\neq2$ **יש למשוואה** II **פתרון יחיד.**

ב. (1) נמצא את היחס $\frac{t}{m}$ **כאשר למשוואות** I **ו-** II **יש אין-סוף פתרונות.**

$$\frac{t}{m}=\frac{-5}{2}=-2.5$$

תשובה: $\frac{t}{m}=-2.5$

(2) נמצא את היחס $\frac{t}{m}$ **כאשר למשוואות** I **ו-** II **אין פתרון**

$$\frac{t}{m}=\frac{0}{-3}=0$$

תשובה: $\frac{t}{m}=0$

ג. נתון $t=m$ **. נמצא את הפתרון המשותף של המשוואות.**

עבור $\mathrm{I}:\quad t^2(2-x)=25+t(5x+t)$ **הפתרון היחיד הוא:** $t\neq-5,\ t\neq0,\quad x=\frac{t-5}{t}$ **.**

עבור $\mathrm{II}:\quad m^2(x-1)+m(x+1)-6x+2=0$ **, כאשר** $t=m$ **, נקבל:**

$$(m+3)(m-2)x=(m-2)(m+1)$$

$$x=\frac{m+1}{m+3},\quad m\neq-3,\ m\neq2\quad\rightarrow x=\frac{t+1}{t+3},\quad t\neq-3,\ t\neq2$$

נמצא את הפתרון המשותף:

$$\frac{t-5}{t}=\frac{t+1}{t+3}$$

$$(t-5)(t+3)=t(t+1)$$

$$t^2+3t-5t-15=t^2+t$$

$$-3t=15$$

$$\boxed{t=-5}$$

$t=-5$ **מקיים את התנאי לפתרון יחיד של משוואה** II **ואת התנאי לאינסוף פתרונות של משוואה** I.

ולכן הפתרון המשותף הוא $x=\frac{-5-5}{t}=\frac{-5-5}{-2}=2$

תשובה: הפתרון המשותף הוא $x=2$.

א. נתון כי $x, y, 9$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה, שנסמן את מנתה ב- q.

$q>0$, כי הסדרה עולה ומכיוון ויש בה איבר חיובי (9) הרי ש- $q>1$.

לכן אם q מנת הסדרה, אז שלושת איבריה הראשונים של הסדרה הם $9, \frac{9}{q}, \frac{9}{q^2}$.

$x, 2y, 20$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה חשבונית.

לכן $\frac{9}{q^2}, \frac{18}{q}, 20$ מהווים סדרה חשבונית.

ומכאן ש: $\frac{9}{q^2}+20=2\cdot\frac{18}{q}$, כי האיבר האמצעי הוא ממוצע חשבוני של שני האיברים הסמוכים.

$$\frac{9}{q^2}+20=2\cdot\frac{18}{q} \quad / \cdot q^2$$

$$9+20q^2=36q$$

$$20q^2-36q+9=0$$

$$q_{1,2}=\frac{36\pm 24}{40} \quad \rightarrow \boxed{q=1.5},\ \cancel{q=0.3} \quad \leftarrow q>1$$

$x=\frac{9}{1.5^2}=4,\ y=\frac{9}{1.5}=6$ (בדיקה - האיברים הראשונים של הסדרה ההנדסית: $4, 6, 9$ ושל החשבונית $4, 12, 20$)

תשובה: $x=4,\ y=6$

ב. (1) בסדרה החשבונית שהתקבלה: $b_1=4, d=8$

נראה כי אם $t=3$ ו- $n=5$ אז $S_{tn}=t^2\cdot S_n$, כלומר $S_{15}=3^2\cdot S_5$

$$S_5=\frac{(2\cdot 4+8\cdot 4)\cdot 5}{2}=100\ ,\ S_{15}=\frac{(2\cdot 4+8\cdot 14)\cdot 15}{2}=900$$

ואומנם: $960=9\cdot 100$

תשובה: הוכַח.

(2) נראה כי לכל t ו- n טבעיים $S_{tn}=t^2\cdot S_n$.

$$S_{tn}=\frac{(2\cdot 4+8\cdot(tn-1))\cdot tn}{2}$$

$$S_{tn}=\frac{(8+8tn-8)\cdot tn}{2}$$

$$S_{tn}=\frac{8tn\cdot tn}{2}$$

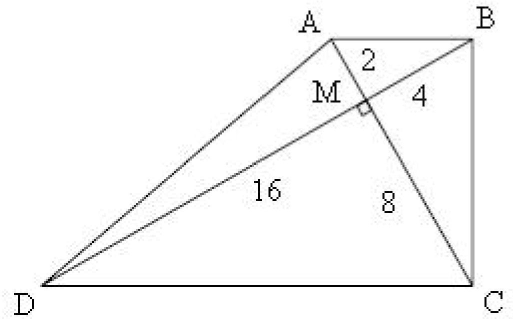
$$S_{tn}=\frac{8n^2\cdot t^2}{2}$$

$$S_{tn}=t^2\cdot\frac{(8+8n-8)\cdot n}{2}$$

$$S_{tn}=t^2\cdot\frac{(2\cdot 4+8\cdot(n-1))\cdot n}{2}$$

$$S_{tn}=t^2\cdot S_n$$

תשובה: הוכַח.



נתונים

.1 $AB \parallel CD$ **.2** $BC \perp CD$ **.3** $\sphericalangle BMA = 90°$

.4 $AM =$ 2 **ס"מ** , **.5** $AC =$ 10 **ס"מ**

צ"ל: א. (1) $\Delta ABM \sim \Delta BMC$ **(2) אורך הקטע** BM

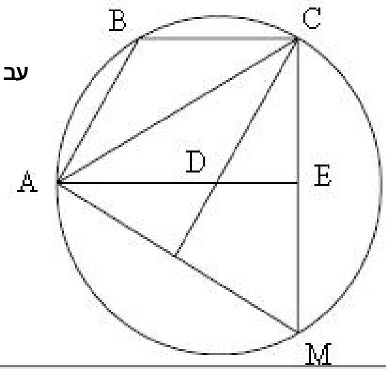
ב. (1) $S_{\Delta AMD}$ **,** $S_{\Delta AMD} = S_{\Delta BMC}$

(2) האם $S_{\Delta AMD} = S_{\Delta BMC}$ **גם כאשר** $\sphericalangle DMC \neq 90°$

ג. S_{ABCD} **.**

הסבר		טענה	נימוק
3	6	$\sphericalangle BMA = \sphericalangle BMC = 90°$ (ז)	נתון
2	7	$\sphericalangle BCD = 90°$	נתון
1	8	$AB \parallel CD$	נתון
7, 8	9	$\sphericalangle ABC = 90°$	זוויות חד צדדיות בין מקבילים משלימות ל- $180°$
6	10	$\sphericalangle ABM = 90° - \sphericalangle BAM$	סכום זוויות ב- ΔABM הוא $180°$
9, 10	11	$\sphericalangle CBM = \sphericalangle BAM$ (ז)	הפרש זוויות
6, 11	12	$\Delta ABM \sim \Delta BCM$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א (1)	
12	13	$\frac{AB}{BC} = \boxed{\frac{AM}{BM} = \frac{BM}{CM}}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
4	14	$AM =$ 2 ס"מ	נתון
5	15	$AC =$ 10 ס"מ	נתון
14, 15	16	$MC =$ 8 ס"מ	הפרש קטעים
13, 14, 16	17	$\frac{2}{BM} = \frac{BM}{8}$	הצבה
17	18	$BM =$ 4 ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל. א (2)	
8	19	$\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{DM}$	משפט תאלס הרחבה 2
19,18,16,14	20	$\frac{2}{8} = \frac{4}{DM}$	הצבה
20	21	$DM =$ 16 ס"מ	נתון

הסבר		טענה	נימוק
6, 14, 21	22	$S_{\Delta AMD}=\frac{AM\cdot CM}{2}=\frac{2\cdot 16}{2}$	נוסחת שטח משולש
22	23	$S_{\Delta AMD}=16$ סמ"ר	חישוב
1	24	$S_{\Delta DCA}=S_{\Delta DBC}$	לשני המשולשים גובה שווה, שהוא המרחק הקבוע בין ישרים מקבילים, לצלע משותפת (DC)
	25	$S_{\Delta DMC}=S_{\Delta DMC}$	שטח שווה לעצמו
24, 25	26	$S_{\Delta AMD}=S_{\Delta BMC}$	חיסור שטחים שווים משטחים שווים והפרש שטחים
מ.ש.ל. ב (1)			
24, 25, 26	27	גם אם $S_{\Delta AMD}=S_{\Delta BMC}$ האלכסונים אינם מאונכים, כי לא השתמשנו בתכונה זו על מנת להראות שהשטחים שווים	
מ.ש.ל. ב (2)			
18, 21	28	$BD=20$ ס"מ	סכום קטעים
6, 15, 28	29	$S_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{20\cdot 10}{2}$	שטח מרובע שאלכסוניו מאונכים שווה למחצית מכפלת האלכסונים והצבה
29	30	$S_{ABCD}=100$ סמ"ר	חישוב
מ.ש.ל. ג			



4

<u>נתונים</u>

.1 $ABCD$ **מקבילית .2** $\sphericalangle EAM = \sphericalangle FCM$

עבור ב: .3 $AF = FM$ **.4** $CE = EF$

צ"ל: א. $CF \perp AM$ **,** $AE \perp CM$

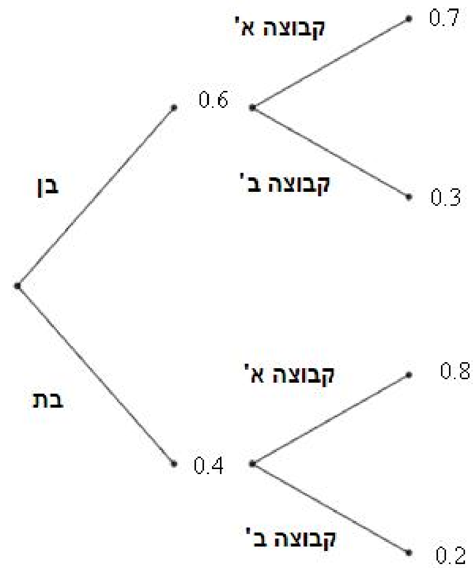
ב. (1) $EF \parallel AC$ **(2)** ΔACM **שווה-צלעות.**

הסבר		טענה	נימוק
	5	$\sphericalangle B + \sphericalangle M = 180°$	זוויות נגדיות משלימות ל- $180°$ במרובע חסום במעגל
1	6	$ABCD$ מקבילית	נתון
6	7	$\sphericalangle B = \sphericalangle CDA$	זוויות נגדיות שוות במקבילית
	8	$\sphericalangle CDA = \sphericalangle EDF$	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
5, 7, 8	9	$\sphericalangle EDF + \sphericalangle M = 180°$	כלל המעבר והצבה
2	10	$\sphericalangle EAM = \sphericalangle FCM$	נתון
	11	$\sphericalangle CDE = \sphericalangle ADF$	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
11	12	$\sphericalangle CED = \sphericalangle AFD$	סכום זוויות ב- ΔCDE ו- ΔADF הוא $180°$
12	13	$\sphericalangle DEM = \sphericalangle DFM$	זוויות צמודות לזוויות שוות
9, 13	14	$\sphericalangle DEM = \sphericalangle DFM = 90°$	סכום זוויות במרובע $EDFM$ $360°$ וחישוב
14	15	$CF \perp AM$	יוצרים זווית ישרה
14	16	$AE \perp CM$	יוצרים זווית ישרה
		מ.ש.ל. א	
3	17	$AF = FM$	נתון
15, 17	18	$AC = CM$	התיכון (CF) מתלכד עם הגובה ולכן המשולש ש"ש
17, 18	19	$\sphericalangle FCA = \sphericalangle FCM$	הגובה לבסיס במש"ש הוא גם חוצה זווית הראש
4	20	$CE = EF$	נתון
20	21	$\sphericalangle CFE = \sphericalangle FCM$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ΔCEF
19, 21	22	$\sphericalangle FCA = \sphericalangle FCM$	כלל המעבר
22	23	$EF \parallel AC$	אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים
		מ.ש.ל. ב (1)	
17, 23	24	EF קטע אמצעים ב- ΔACM	יוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע שממול
24	25	$CE = EM$	קטע אמצעים חוצה את הצלעות
16, 25	26	$AC = AM$	התיכון (AE) מתלכד עם הגובה ולכן המשולש ש"ש

הסבר		טענה	נימוק
18, 26	27	AC = AM = CM	כלל המעבר
27	28	ΔACM שווה-צלעות	כל הצלעות שוות
		מ.ש.ל. ב (2)	

א. ההסתברויות לבחירה באקראי של בן היא $0.6 = 60\%$, **ובהתאם לבחירת בת** $1-0.6=0.4$.

כמו כן שיעור אוהדי קבוצה א' מבין הבנים הוא $0.7 = 70\%$ **, ומבין הבנות הוא** $0.8 = 80\%$



נמצא כמה אחוזים מכלל הצופים (בנים ובנות) הם אוהדי קבוצה ב'.

$$P(beth) = 0.6\cdot 0.3 + 0.4\cdot 0.2 = 0.26 = 26\%$$

תשובה: 26% **מכלל הצופים הם אוהדי קבוצה ב'.**

ב. נמצא מהי ההסתברות שאוהד מקבוצה א' שנבחר באקראי הוא בן.

$$P(ben/aleph) = \frac{P(ben\cap aleph)}{P(aleph)} = \frac{0.6\cdot 0.7}{0.6\cdot 0.7+0.4\cdot 0.8} = \frac{0.42}{0.74} = \frac{21}{37}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{21}{37}$.

ג. נחשב את ההסתברות שמתוך 10 **אוהדים של קבוצה א' שנבחרו באקראי, שלכל היותר** 8 **מהם בנים.**

ההסתברות ל- 10 **בנים היא** $(\frac{21}{37})^{10}$ **, על בסיס התוצאה שחושבה בסעיף ב.**

ההסתברות ל- 9 **בנים, בעזרת נוסחת ברנולי, כי זו התפלגות בינומית (חוזרים על אותו תתהלך),**

כאשר נתון כי $n=10$, $p=\frac{21}{37}$ **,** $k=9$:

$$P_{10}(9) = \binom{10}{9}(\frac{21}{37})^9(1-\frac{21}{37})^{10-9} = \frac{10!}{10!(10-9)!}\cdot(\frac{21}{37})^9\cdot(\frac{16}{37})^1 = 10\cdot(\frac{21}{37})^9\cdot(\frac{16}{37})^1 = 0.0264$$

ולכן ההסתברות למאורע המשלים, לכל היותר 8 **בנים היא** $p = 1-(\frac{21}{37})^{10} - 0.0264 = 0.9701$

תשובה: ההסתברות היא 0.9701 **.**

א. נגדיר את הקבוצות הבאות

S - **קבוצת תלמידי שכבה י'**

A **- קבוצת התלמידים שגרים בפנימייה,** $\overline{A}$ **- קבוצת התלמידים** ***שלא*** **גרים בפנימייה**

B **- קבוצת התלמידים שהצליחו בבחינה,** $\overline{B}$ - **קבוצת התלמידים** ***שלא*** **הצליחו בבחינה**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$N(S) = 200$$

$$N(B) = 80 \quad \rightarrow P(B) = \frac{80}{200} = 0.4 \quad \rightarrow P(\overline{B}) = 0.6$$

$$P(A / B) = 0.4 \quad \rightarrow P(\overline{A} / B) = 0.6$$

$$N(A) = 80 \quad \rightarrow P(A) = \frac{80}{200} = 0.4 \quad \rightarrow P(\overline{A}) = 0.6$$

ניתן לראות כי $P(A / B) = P(A)$ **ולכן אין קשר סטטיסטי בין מקום המגורים להצלחה בבחינה.**

בהתאם, $P(B / A) = P(B) = 0.4$

תשובה: ההסתברות שהתלמיד, שהצליח בבגרות, גר בפנימייה היא 0.4 **.**

ב. כיוון שאין קשר סטטיסטי, הרי ש: $P(B / \overline{A}) = P(B) = 0.4$ **.**

תשובה: שיעור ההצלחה בבחינה בקרב התלמידים שאינם גרים בפנימייה הוא $0.4 = 40\%$ **.**

ג. הראינו כי ניתן לראות כי $P(A / B) = P(A)$ **ולכן אין קשר סטטיסטי בין מקום המגורים להצלחה בבחינה.**

תשובה: אין קשר סטטיסטי בין מקום המגורים להצלחה בבחינה.

ד. נגדיר את הקבוצות הבאות: C - קבוצת התלמידים ש*משקיעים* בלימודים, $\overline{C}$ - קבוצת התלמידים *שלא משקיעים*.

(1) <u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(C/B)=\frac{3}{4} \quad \rightarrow P(\overline{C}/B)=\frac{1}{4}$$

$$P(C/\overline{B})=\frac{3}{8} \quad \rightarrow P(C/\overline{B})=\frac{5}{8}$$

כיוון ש: $P(C/B)=\neq P(C/\overline{B})$ **הרי שיש קשר סטטיסטי.**

תשובה: קיים קשר סטטיסטי בין השקעה בלימודים לבין הצלחה בבחינה.

(2) כיוון ששיעור המשקיעים בקרב התלמידים שהצליחו בבחינה גבוה מבין או *שלא* הצליחו בבחינה,

$(\frac{3}{4}>\frac{5}{8})$ **, הרי שההסתברות שרן הצליח בבחינות גבוהה יותר *מאשר* ההסתברות *שלא* הצליח בה.**

נמחיש זאת בעזרת הטבלה:

$$P(C/B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{P(C\cap B)}{0.4}$$

$$\boxed{P(C\cap B)=0.3}$$

$$P(C/\overline{B})=\frac{P(C\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{P(C\cap \overline{B})}{0.6}$$

$$\boxed{P(C\cap \overline{B})=0.225}$$

	C **השקיעו**	$\overline{C}$ ***לא* השקיעו**	
B **- הצליחו**	0.3	0.1	0.4
$\overline{B}$ **- *לא* הצליחו**	0.225	0.375	0.6
	0.525	0.475	1

$$P(B/C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{0.3}{0.525}=\frac{4}{7} \quad \rightarrow P(\overline{B}/C)=\frac{3}{7}$$

תשובה: הסתברות גבוהה יותר.