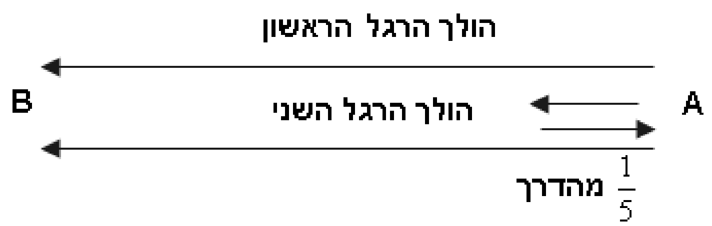
.1

נסמן ב- x את מהירות הולך הרגל הראשון (קמ"ש) וב- y את מהירות הולך הרגל השני (קמ"ש).



הולך הרגל הראשון הגיע ל- B $2\frac{1}{2}$ שעות לאחר שעזב את A.

מכיוון שהולך הרגל השני, אחרי שעבר $\frac{1}{5}$ מהדרך, חזר ל- A – הרי שעבר תחילה $0.4=\frac{2}{5}$ מהדרך,

כלומר, אם המרחק הכולל הוא $2.5x$ (ראה שורה ראשונה בטבלה), הרי שעבר $0.4\cdot 2.5x=x$

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
הולך רגל ראשון	כל ק"מ	$\frac{1}{x}$	x	1
הולך רגל שני	כל ק"מ	$\frac{1}{y}$	y	1
הולך רגל ראשון	מעיר A עד ל- B	2.5	x	$2.5x$
הולך רגל שני	0.4 מהדרך	$\frac{x}{y}$	y	x
	המתנה	$\frac{1}{6}$	y	$\frac{y}{6}$
	מעיר A עד ל- B	$\frac{2.5x}{y}$	y	$2.5x$

הולך הרגל השני עבר כל ק"מ ב- 5 דקות פחות מאשר הראשון :

המשוואה מתאימה, אם כן, היא: $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{12}$

שני הולכי הרגל הגיעו לעיר B באותו הזמן :

המשוואה מתאימה, אם כן, היא: $2.5=\frac{x}{y}+\frac{1}{6}+\frac{2.5x}{y}$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{12}\\ 2.5=\frac{x}{y}+\frac{1}{6}+\frac{2.5x}{y}\end{cases}$$

$$\frac{7}{3}=\frac{3.5x}{y}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{y}$$

$$\boxed{x=\frac{2y}{3}}$$

$$\frac{1}{\frac{2y}{3}}=\frac{1}{y}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{2y}=\frac{1}{y}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2y}=\frac{1}{12}$$

$$\boxed{y=6}$$

$$x=\frac{2\cdot 6}{3}$$

$$\boxed{x=4}$$

תשובה: מהירות הולך הרגל הראשון היא 4 קמ"ש., מהירות הולך הרגל השני היא 6 קמ"ש

.2

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$ **אגף שמאל:** $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\Leftrightarrow \underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}}_{\downarrow}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1}+\boxed{\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\boxed{\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

הביטויים שבמסגרת שווים זה לזה, לכן די אם נוכיח כי:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2k+1}+\frac{2-1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

.3

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-a}$

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=4$ **הוא** $-\frac{1}{2}$**, לכן** $f'(4)=-\frac{1}{2}$

$$\boxed{f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-a}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\cancel{2}(\sqrt{x}-a)}{\cancel{2}\sqrt{x}}-\frac{1\cancel{2\sqrt{x}}}{\cancel{2\sqrt{x}}}}{(\sqrt{x}-a)^2}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{4}-a}{\sqrt{4}}-1}{(\sqrt{4}-a)^2} \quad \leftarrow f'(4)=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{4}-a}{2}-1}{(2-a)^2}$$

$$-\frac{(2-a)^2}{2}=\frac{2-a-2}{2(2-a)^2}$$

$$(2-a)^2=a$$

$$4-4a+a^2=a$$

$$a^2-5a+4=0$$

$$(a-1)(a-4)=0$$

$$\boxed{a=1,\,4}$$

תשובה: $a=1,\,4$

נציב $a=1$**, ובהתאם:** $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

ב. I. **נמצא את תחום ההגדרה**

בפונקציה מופיע $\sqrt{x}$**, לכן** $x\ge 0$

המכנה שונה מאפס, לכן $\sqrt{x}-1\neq 0 \;\rightarrow \sqrt{x}\neq 1 \;\rightarrow x\neq 1$:

אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y **היא** $x=1$ **- מאפס מכנה ולא מונה**

אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x **היא** $y=2$ **-** $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=2$

תשובה: תחום הגדרה: $x\ge 0,\ x\neq 1$ **, אסימפטוטות מקבילות לצירים:** $x=1$ **,** $y=2$

II. **נמצא את נקודות החיתוך עם הצירים**

חיתוך ציר ה- y $x=0$, **לכן** $f(0)=\frac{2\sqrt{0}}{\sqrt{0}-1}=0$ **ונקודת החיתוך היא** $(0,0)$

חיתוך ציר ה- x $y=0$, **לכן** $0=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **ונקודת החיתוך היחידה היא** $(0,0)$

תשובה: $(0,0)$

III. **נמצא את סימני נגזרת הפונקציה בתחום הגדתה**

$$\boxed{f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\cancel{2}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{2}\sqrt{x}}-\frac{1\cancel{2\sqrt{x}}}{\cancel{2\sqrt{x}}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}}$$

סימן המכנה חיובי, לכן הנגזרת שלילית בכל תחום הגדרתה

ובהתאם הפונקציה יורדת בכל נקודה בתחום הגדרתה

IV. **נראה כי עבור** $x=\frac{1}{9}$ **הפונקציה משנה את קעירותה**

$$\boxed{f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}}$$

$$f''(x)=+\frac{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}}{x(\sqrt{x}-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{x-2\sqrt{x}+1+2x-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^4}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{3x-4\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^4}}$$

$$f''(x)=0$$

$$3x-4\sqrt{x}+1=0$$

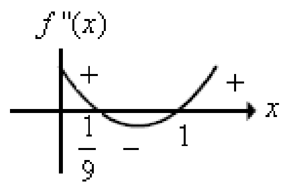
$$\sqrt{x}_{1,2}=\frac{4\pm 2}{6}$$

$$\sqrt{x}=1 \quad \to x=1$$

$$\sqrt{x}=\frac{1}{3} \quad \to x=\frac{1}{9}$$

מכנה הנגזרת השנייה חיובי

נצייר את הפרבולה של מונה הנגזרת השנייה

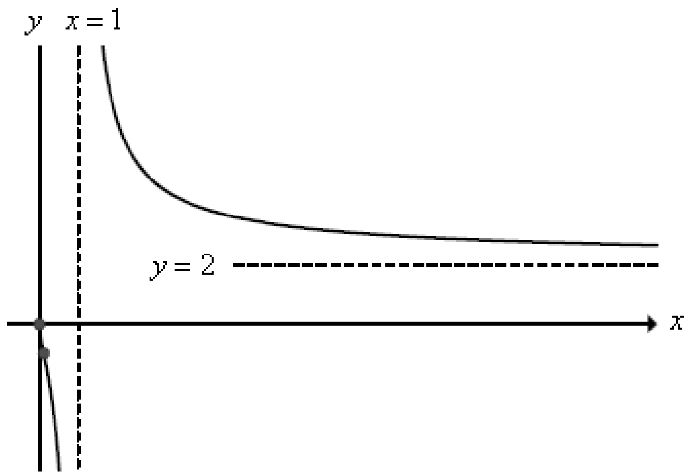


	$\frac{1}{9}$		1		x
+	0	**-**	0	**+**	y''
U	**פיתול**	**I**	**פיתול**	**U**	**מסקנה**

קבלנו ש: $x=\frac{1}{9}$ **נקודת פיתול כי עוברים מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה**

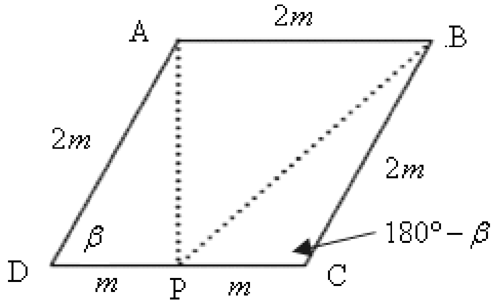
V. **הראינו בסעיף הקודם כי עבור** $x>1$ **הפונקציה קעורה כלפי מעלה (** $f''(x)>0$ **)**

VI. **הסקיצה המתאימה:**



.4

א. נעלה את השרטוט המעודכן והסברים בהמשך:



השלמת נתונים

$ABCD$ **מעוין (נתון)**

$\mathbf{R}ADP = b$ **(נתון)**

$\mathbf{R}BCD = 180° - b$ **(סכום זוויות סמוכות במקבילית/ מעוין הוא** $180°$**)**

$DP = m$ **(נתון)**

$CD = AB = BC = AD = 2m$ **(** P **אמצע** CD **וצלעות המעוין שוות)**

ניעזר במשפט קוסינוסים בשני משולשים

$\underline{\Delta ADP}$

$$AP^2 = AD^2 + DP^2 - 2AD \cdot DP \cdot \cos\mathbf{R}ADP$$

$$AP^2 = (2m)^2 + m^2 - 2 \cdot 2m \cdot m \cdot \cos b$$

$$AP^2 = 4m^2 + m^2 - 4m^2\cos b$$

$$AP = \sqrt{5m^2 - 4m^2\cos b}$$

$$\boxed{AP = m\sqrt{5 - 4\cos b}}$$

$\underline{\Delta BCP}$

$$BP^2 = BC^2 + CP^2 - 2BC \cdot CP \cdot \cos\mathbf{R}BCP$$

$$BP^2 = (2m)^2 + m^2 - 2 \cdot 2m \cdot m \cdot \cos(180° - b)$$

$$BP^2 = 4m^2 + m^2 + 4m^2\cos b \quad \leftarrow \cos x = -\cos(180° - x)$$

$$BP = \sqrt{5m^2 + 4m^2\cos b}$$

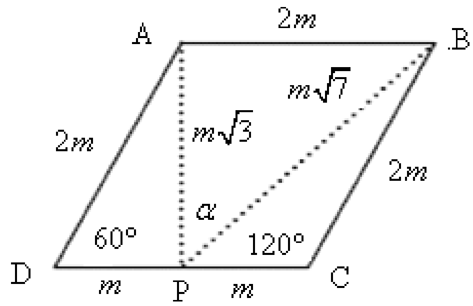
$$\boxed{BP = m\sqrt{5 + 4\cos b}}$$

תשובה: $AP = m\sqrt{5 - 4\cos b}$, $BP = m\sqrt{5 + 4\cos b}$

ב. נעדכן את הנתונים והסברים בהמשך

$\angle APB = a$ **, נתון כי** $b = 60^\circ \to \cos b = 0.5$

$$AP = m\sqrt{5-4\cdot 0.5} = m\sqrt{3}$$
$$BP = m\sqrt{5+4\cdot 0.5} = m\sqrt{7}$$



ניעזר במשפט קוסינוסים ב- ΔAPB

$\underline{\Delta APB}$

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP\cdot BP\cdot \cos\angle APB$$
$$(2m)^2 = (m\sqrt{3})^2 + (m\sqrt{7})^2 - 2\cdot m\sqrt{3}\cdot m\sqrt{7}\cdot \cos a$$
$$4m^2 = 3m^2 + 7m^2 - 2\sqrt{21}m^2\cos a \quad /:m^2 \neq 0$$
$$\cos a = \frac{6}{2\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} \quad \leftarrow \cdot\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}}$$
$$\boxed{\cos a = \frac{\sqrt{21}}{7}}$$

ג. נשתמש במשפט הסינוסים

נשים לב ש $BP = m\sqrt{7} > 2m$ **ולכן זווית** APB **חדה**

$\underline{\Delta APB}$

$$\frac{AB}{\sin\angle APB} = 2R \quad \to \frac{AB}{2\sin\angle APB} = R$$
$$R = \frac{2m}{\sin a}$$
$$R = \frac{\cancel{2}m}{\cancel{2}\sqrt{1-(\frac{\sqrt{21}}{7})^2}} \quad \leftarrow \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$
$$R = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{21}{49}}} = \frac{m}{\sqrt{\frac{4}{7}}} = \frac{m\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$$
$$\boxed{R = \frac{m\sqrt{7}}{2}}$$

תשובה: $\frac{m\sqrt{7}}{2}$

נכתב ע"י עפר ילין

.5

הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח* OABC **, שאינו מרובע.**

קיימות שתי אפשרויות לציור, כאשר $m > 0$ **.**

נקודה A **נמצאת על גרף הפונקציה** $y = x^2$ **, ושיעוריה הם:** $\mathrm{A}(m, m^2)$ **.**

נקודה B **נמצאת על גרף הפונקציה** $x + y = 10$ **ושיעוריה הם:** $\mathrm{B}(10 - m^2, m^2)$**.**

נקודה C **נמצאת על ציר ה-** x **ושיעוריה הם:** $\mathrm{C}(10 - m^2, 0)$**.**

נקודה O **היא ראשית הצירים ושיעוריה הם:** $\mathrm{O}(0, 0)$

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות:

$$x^2 = 10 - x$$

$$x^2 + x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} =$$

$$x_1 = 2.7 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{E}(2.7, 7.3)}$$

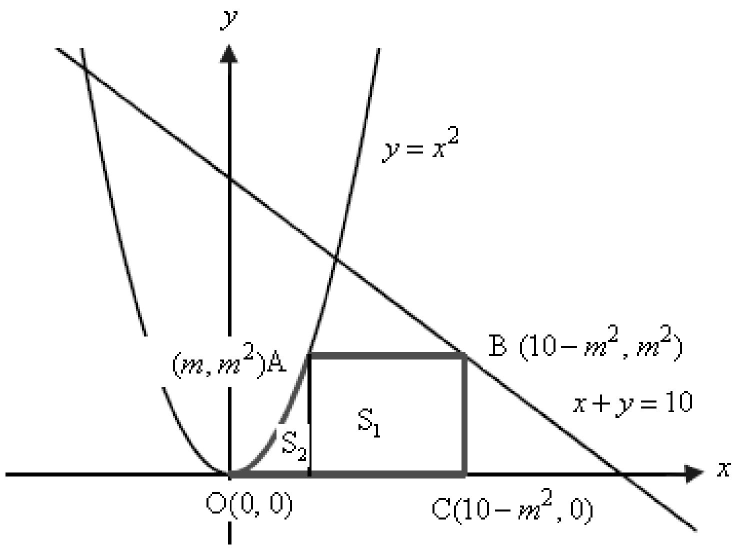
$$x_2 = -3.7 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{F}(-3.7, 13.7)}$$

גרף הפונקציה $x + y = 10$ **חותך את ציר ה-** y **בנקודה** $(0, 10)$

אפשרות אחת היא למקם את B מימין לציר ה- y ,

כאשר $0<m<2.7$ ו- $0<y_B<7.3$

והציור המתאים הוא:



השטח S_1 הוא מלבן ששטחו:

$$S_1=(10-m^2-m)\cdot m^2$$

$$\boxed{S_1=10m^2-m^4-m^3}$$

את השטח S_2 נחשב באמצעות אינטגרל

$$S_2=\int_0^m x^2\,dx=$$

$$S_2=\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^m$$

$$S_2=\left(\frac{m^3}{3}\right)-\left(\frac{0^3}{3}\right)$$

$$\boxed{S_2=\frac{m^3}{3}}$$

כלומר השטח שיש להביא למקסימום הוא:

$$S=S_1+S_2=10m^2-m^4-m^3+\frac{m^3}{3}$$

$$\boxed{S=10m^2-m^4-\frac{2m^3}{3}}$$

נמצא את נקודת הקיצון

$$\boxed{S(m)=10m^2-m^4-\frac{2m^3}{3}}$$

$$\boxed{S'(m)=20m-4m^3-2m^2}$$

$$20m-4m^4-2m^2=0 \quad /:m\neq 0$$

$$20-4m^2-2m=0 \quad /:(-2)\neq 0$$

$$2m^2+m=10=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-1\pm 9}{4}$$

$$\boxed{m_1=2},\quad \cancel{m_2=-2.5} \quad \leftarrow m>0$$

$$\boxed{S''(m)=20-12m^2-4m}$$

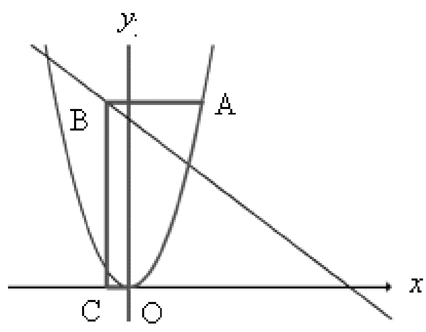
$$S''(2)=20-12\cdot 2^2-4\cdot 2=-36<0 \quad \rightarrow Max$$

תשובה: $m=2$ **אשר נמצאת בתחום** $0<m<2.7$

אפשרות אחרת היא למקם את B **משמאל לציר ה-** y **,**

כאשר $\sqrt{10}<m<3.7$ **ו-** $10<y_B<13.7$

והציור המתאים הוא:



במקרה זה שטח OABC **המכסימלי יתקבל כאשר** B **תתלכד עם** F **,**

שכן השטח גדל, ככל ש- B **נעה על גרף הפונקציה** $x+y=10$

לא נראה שזו הייתה כוונת השואלים.