.1

א. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} mx+3y=4m-3 \\ x+3my=m \end{cases}$$

נמצא את הפתרון היחיד , ותוך כדי כך את התנאי לקיומו.

נכפיל את המשוואה השנייה ב- $(-m)$,

אולם בשל כך יש לבדוק האם $m=0$ **מאפשר פתרון יחיד.**

נציב $m=0$ **בשתי המשוואות.**

$$\begin{cases} 0\cdot x+3y=4\cdot 0-3 \quad \rightarrow y=-3 \\ x+3\cdot 0y=0 \quad \rightarrow x=0 \end{cases}$$

מתקבל פתרון יחיד ולכן ניתן להמשיך בפתרון.

$$\begin{cases} mx+3y=4m-3 \\ x+3my=m \quad /\cdot(-m) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} mx+3y=4m-3 \\ -mx-3m^2y=-m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (3-3m^2)y=4m-3-m^2$$

$$\Leftrightarrow 3(1-m^2)y=-(m^2-4m+3)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3(1-m)(1+m)y=-(m-1)(m-3)}$$

כאשר $m=1$ **נקבל** $0x=0$ **,**

נציב $m=1$ **בשתי המשוואות המקוריות:**

$$\begin{cases} 1\cdot x+3y=4\cdot 1-3 \quad \rightarrow x+3y=1 \\ x+3\cdot 1y=1 \quad \rightarrow x+3y=1 \end{cases}$$

כלומר שתי המשוואות שקולות ואינסוף פתרונות.

נציב $m=-1$ **בשתי המשוואות המקוריות:**

$$\begin{cases} (-1)\cdot x+3y=4\cdot(-1)-3 \quad \rightarrow -x+3y=-7 \\ x+3\cdot(-1)y=(-1) \quad \rightarrow -x+3y=1 \end{cases}$$

כלומר שתי המשוואות סותרות זו את זו ואין פתרון.

עבור $m\neq\pm 1$ **נקבל פתרון יחיד**

$$3(1-m)(1+m)y=-(m-1)(m-3)$$

$$y=\frac{-(m-1)(m-3)}{3(1-m)(1+m)}$$

$$\boxed{y=\frac{m-3}{3(1+m)}}$$

$$x+3m\cdot\frac{m-3}{3(1+m)}=m$$

$$x=m-\frac{m(m-3)}{(1+m)}$$

$$x=\frac{m+m^2-m^2+3m}{1+m}$$

$$\boxed{x=\frac{4m}{1+m}}$$

תשובה: $m\neq\pm1$, $(\frac{4m}{1+m},\frac{m-3}{3(1+m)})$ **.**

ב. פתרון ברביע השלישי – הוא בעל שיעורי x, y **שליליים**

הפתרון הוא $m\neq\pm1$, $(\frac{4m}{1+m},\frac{m-3}{3(1+m)})$

נפתור את מערכת אי השוויונות:

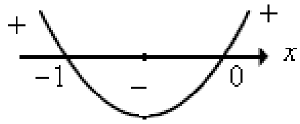
$$and\begin{cases}\frac{4m}{1+m}<0\\ \frac{m-3}{3(1+m)}<0\end{cases}$$

- $\frac{4m}{1+m}<0$ **-**

$$\frac{4m}{3(1+m)}<0 \quad /3(1+m)^2$$

$$12m(1+m)<0$$

נצייר את הפרבולה המתאימה



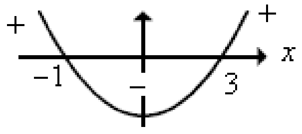
$$\boxed{-1<m<0}$$

- $\frac{m-3}{3(1+m)} < 0$ -

$$\frac{m-3}{3(1+m)} < 0 \quad / 3(1+m)^2$$

$$3(m-3)(1+m) < 0$$

נצייר את הפרבולה המתאימה:



$\boxed{-1 < m < 3}$

ואם נחתוך את הפתרונות נקבל ש: $-1 < m < 0$

תשובה: $-1 < m < 0$

.2

אחד התלמידים פתר ביום הראשון 4 **תרגילים,**

ובכל יום שאחריו פתר תרגיל אחד יותר מן היום שקדם לו.

זו סדרה חשבונית, שבה: $\boxed{d=1}$, $\boxed{a_1=4}$

ניעזר בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית: $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+d(n-1))$

על-מנת לחשב את מספר התרגילים שפתר.

$$S_n=\frac{n}{2}(2\cdot 4+1(n-1))$$

$$S_n=\frac{n}{2}(8+n-1)$$

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}(7+n)}$$

התלמיד השני עבד בקצב קבוע ופתר בכל יום 13 **תרגילים.**

הוא סיים את העבודה שלושה ימים לפני הראשון, לכן עבד $n-3$ **ימים.**

מספר התרגילים שפתר, אם כך, הוא $13(n-3)$**.**

לשני התלמידים אותו מספר של תרגילים לחופשת הסוכות, לכן:

$$\frac{n}{2}(7+n)=13(n-3)$$

$$7n+n^2=26n-78$$

$$n^2-19n+78=0$$

$$n_{1,2}=\frac{19\pm 7}{2}$$

$$\boxed{n_1=13}\quad\boxed{n_2=6}$$

עבור $n=6$ **נקבל** $S_n=13(6-3)=39$ **, כלומר** 39 **תרגילים.**

עבור $n=13$ **נקבל** $S_n=13(13-3)=130$ **, כלומר** 130 **תרגילים.**

תשובה: במאגר 39 **או** 130 **תרגילים.**

.3

<u>נתונים</u>

1. CD **משיק למעגל**
2. DE **מקביל ל-** BC

עבור ב

3. EP **משיק למעגל**

צ"ל:

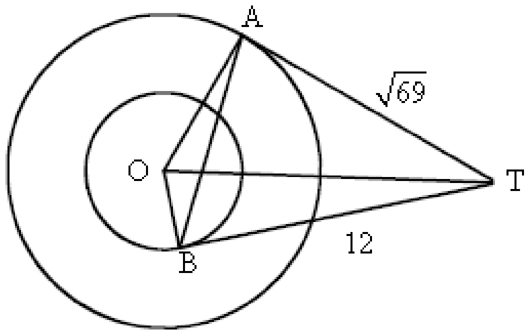
א. $AE \cdot CE = DE^2$

ב. $DE = PE$

<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
נביט על ΔCED **ו-** ΔDEA **ונראה שהם דומים**			
1	4	CD **משיק למעגל**	נתון
4	5	$\mathbf{R}DCB = \mathbf{R}A$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני
2	6	DE **מקביל ל-** BC	נתון
6	7	$\mathbf{R}DCB = \mathbf{R}CDE$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
5,7	8	$\mathbf{R}A = \mathbf{R}CDE$	כלל המעבר
	9	$\mathbf{R}DEA = \mathbf{R}CED$	זווית משותפת
8,9	10	$\Delta DEA : \Delta CED$	משפט דמיון שני (ז. ז.)
10	11	$\frac{DE}{CE} = \frac{DA}{CD} = \frac{EA}{ED}$	יחסי פרופורציה במשולשים דומים
11	12	$AE \cdot CE = DE^2$	חישוב
מ.ש.ל. א			
3	13	EP **משיק למעגל**	נתון
13	14	$AE \cdot CE = EP^2$	אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצא משיק וחותך, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק
12,14	15	$DE^2 = PE^2$	כלל המעבר
15	16	$DE = PE$	חישוב
מ.ש.ל. ב			

.4



<u>נתונים</u>

.1 TB **משיק למעגל הקטן**

.2 TA **משיק למעגל הגדול**

.3 $TA = \sqrt{69}$,

.4 $TB = 12$

.5 $AO = 2BO$

צ"ל:

א. AOBT **בר חסימה ואת רדיוס המעגל שחוסם אותו**

ב. **R**ATO = **R**OBA

<u>הוכחה</u>

הסבר		טענה	נימוק
1	6	**משיק למעגל הקטן** TB	**נתון**
6	7	$\angle TBO = 90°$	**זווית בין משיק לרדיוס היא ישרה**
3	8	**משיק למעגל הגדול** TA	**זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים**
8	9	$\angle TAO = 90°$	**זווית בין משיק לרדיוס היא ישרה**
7,9	10	**מרובע** $AOBT$ **בר חסימה**	**סכום זוויות נגדיות** $180°$
10	11	**קוטר של המעגל החוסם** TO	**נשען על זווית היקפית ישרה**
		מ.ש.ל א	
3	12	$TA = \sqrt{69}$	**נתון**
9	13	$TO^2 = AO^2 + TA^2$	**משפט פיתגורס** ΔATO
4	14	$TB = 12$	**נתון**
7	15	$TO^2 = BO^2 + TB^2$	**משפט פיתגורס** ΔBTO
13,15	16	$BO^2 + TB^2 = AO^2 + TA^2$	**כלל המעבר**
5	17	$AO = 2BO$	**נתון**
12,14, 16,17	18	$BO^2 + 12^2 = (2BO)^2 + \sqrt{69}^2$	**הצבה**
18	19	$BO^2 + 144 = 4BO^2 + 69$ $3BO^2 = 75$ $BO = 5$	**חישוב**
14,15,19	20	$TO^2 = 5^2 + 12^2$	**הצבה**
20	21	$TO = 13$	**חישוב**
11,21	22	$R = 6.5$	**הרדיוס שווה למחצית הקוטר**
		מ.ש.ל. א	
10	23	$\angle ATO = \angle OBA$	**זוויות היקפיות הנשענות על קשת שווה** $\overset{\frown}{AO}$ **,** **במעגל החוסם את המרובע** $AOBT$ **– שוות זו לזו**
		מ.ש.ל. ב	

.5

<u>הסתברות להוצאה ראשונה</u>

בכובע $2n+1$ פתקים הממוספרים בסדר עולה: $1,2,3,...,2n+1$

מספר הפתקים בכובע הוא אי-זוגי, מתוכם n זוגיים ו- $n+1$ אי-זוגיים

לכן ההסתברות להוצאת פתק אי-זוגי היא $\frac{n+1}{2n+1}$ ופתק זוגי $\frac{n}{2n+1}$

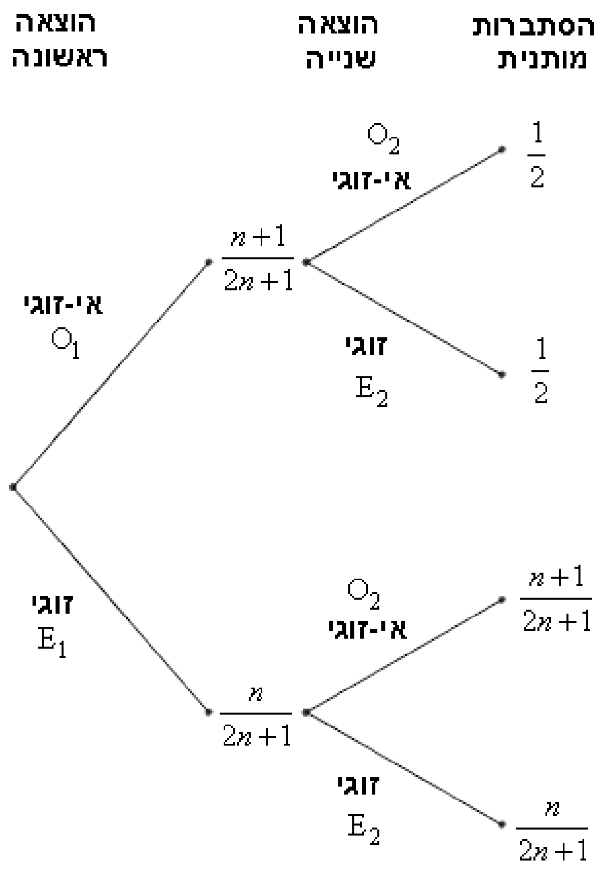
<u>הסתברות להוצאה שנייה</u>

אם יצא פתק אי-זוגי – נשאר מספר זוגי של פתקים, מתוכם n זוגיים ו- n אי-זוגיים

לכן ההסתברות להוצאת פתק אי-זוגי היא $\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$ ופתק זוגי $\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

אם יצא פתק זוגי מחזירים אותו לכובע וההסתברויות לא משתנות

נציג הנתונים על עץ אפשרויות הסתברות מותנית



א. נגדיר את המאורעות המתאימים:

O_1 **- הוצאת פתק אי-זוגי בפעם הראשונה**

O_2 **- הוצאת פתק אי-זוגי בפעם השנייה**

E_1 **- הוצאת פתק זוגי בפעם הראשונה**

E_2 **- הוצאת פתק זוגי בפעם השנייה**

ידוע שההסתברות שאחד הפתקים שהוצא הוא זוגי ואחד הפתקים הוא אי-זוגי היא $\frac{26}{49}$

$$P((O_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap O_2)) = P(O_1) \cdot P(E_2 / O_1) + P(E_1) \cdot P(O_2 / E_1)$$

$$\frac{26}{49} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \quad / \cdot 98(2n+1)^2$$

$$52(2n+1)^2 = 49(n+1)(2n+1) + 98n(n+1)$$

$$208n^2 + 208n + 52 = 98n^2 + 147n + 49 + 98n^2 + 98n$$

$$12n^2 - 37n + 3 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{37 \pm 35}{24}$$

$$\boxed{n = 3} \qquad \cancel{n = \frac{1}{24}}$$

אפשרות שנייה נפסלה כי n **מספר טבעי בהתאם לסיפור המעשה**

תשובה: מספר הפתקים בכובע 7

6.

א. נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - **קבוצת התלמידים שניגשה למבחן**

A - **קבוצת התלמידים המצליחים בבחינה**

$\overline{A}$ - **קבוצת התלמידים הנכשלים בבחינה**

C - **קבוצת התלמידים שהשתתפו בקורס**

$\overline{C}$ - **קבוצת התלמידים שלא השתתפו בקורס**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(C) = 0.6 \quad \to P(\overline{C}) = 0.4$$

$$P(C/A) = 0.45 \quad \to P(\overline{C}/A) = 0.55$$

$$P(A/C) = 0.5 \quad \to P(\overline{A}/C) = 0.5$$

נשתמש בנוסחת בייס:

$$P(A/C) = \frac{P(C/A)\cdot P(A)}{P(C)}$$

$$0.5 = \frac{0.45\cdot P(A)}{0.6}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$$

תשובה: 66.67% **מהתלמידים הצליחו בבחינה.**

ב. $P(A/C) = 0.5 \quad < \quad P(A) = \frac{2}{3}$

לכן יש קשר סטטיסטי (לא מתקיים שוויון), אולם לא בהכרח קיים קשר סיבתי,

שכן ייתכנו גורמים מתווכים נוספים.

דוגמאות אפשריות: אחוז השתתפות בשיעורי הקורס, ציונים במקצועות אחרים, רמת משכל.

בכל מקרה, במחקר הבודק שני גורמים בלבד – לא ייתכן למצוא קשר סיבתי.

על-פי הכיוון של אי השוויון ההשתתפות בקורס מקטינה את הסיכוי להצליח בבחינה.

ג. נחשב באמצעות נוסחת בייס

$$P(A/\overline{C}) = \frac{P(\overline{C}/A)\cdot P(A)}{P(\overline{C})}$$

$$P(A/\overline{C}) = \frac{0.55\cdot\frac{2}{3}}{0.4}$$

$$P(A/\overline{C}) = \frac{11}{12} \quad \to P(\overline{A}/\overline{C}) = \frac{1}{12}$$

תשובה: הסיכוי שעמית נכשל בבחינה הוא $\frac{1}{12}$ **.**